

# समीकरण-मीमांसा

---

दूसरा भाग

---

लेखक

स्वर्गवासी पं० सुधाकर द्विवेदी  
जीवः

---

सम्पादक

पद्माकर द्विवेदी



प्रकाशक

विज्ञान परिषत्, प्रयाग ।

श्री जानकीवल्लभो विजयते

# समीकरण-मीमांसा

## दूसरा भाग

जयति जगति रामः सर्वदा सत्यकामः  
सकलवपुषि जीवः शोभते योऽप्यजीवः ।  
तमिह हृदि निधाय स्वच्छयुक्तिं विधाय  
वदति विविधभेदान् बीजजातानखेदान् ॥

### १६—लुप्तीकरण

२०४—न ध्रुव शक्तिक समीकरणों की परम्परा दी हुई हो जिनमें न अव्यक्त हों अथवा न अध्रुवशक्तिक समीकरणों की परम्परा दी हो जहां न—१ अव्यक्त हों तो उनके परस्पर मिलाने से जो एक समीकरण प्र=० ऐसा उत्पन्न हो जो समीकरणों के पदों के गुणकों के अकरणीगत और अभिन्नफल के रूप में है तो प्र को समीकरणों का प्रत्युत्पन्न कहते हैं। जैसे यदि

$$अय^२ + २कय + ख=०,$$

$$अ'य^२ + २क'य + ख'=०$$

दिष्ट हुए ऐसे दो समीकरण हों जहां दोनों में य एक ही है तो दोनों पर से य के मान ले आने से और उनको परस्पर समान करने से

$$-\frac{क}{अ} + \frac{\sqrt{क^2 - अख}}{अ} = -\frac{क'}{अ'} + \frac{\sqrt{क'^2 - अ'ख'}}{अ'}$$

अअ' से गुण कर समशोधन से

$$अक' - अ'क = अ\sqrt{क'^2 - अ'ख'} - अ'\sqrt{क^2 - अख}$$

वर्ग करने से

$$अ^2क'^2 + अ'^2क^2 - 2अअ'कक'$$

$$= अ^2क'^2 - अ^2अ'ख' + अ'^2अ'^2कख$$

$$- 2अअ'\sqrt{क'^2 - अ'ख'}\sqrt{क^2 - अख}$$

समशोधन और अअ' के अपवर्त्तन से

$$अख' + अ'ख - 2कक'$$

$$= -2\sqrt{क'^2 - अ'ख'}\sqrt{क^2 - अख}$$

वर्ग कर एक ओर ले जाने से

$$४(क^2 - अख)(क'^2 - अ'ख') - (अख' + अ'ख - 2कक')^2 = 0 = प्र$$

यह दिष्ट हुए दोनों समीकरणों का प्रत्युत्पन्न हुआ। यहां तो समीकरणों से अव्यक्तमान जान कर तब प्र का मान निकाला गया है। अब ऐसी साधारण क्रिया दिखलाते हैं जिससे बिना अव्यक्तमान निकाले प्रत्युत्पन्न का मान आवे।

२०५—तद्रूपफलों से लुप्तीकरण—कल्पना करो कि एक म घात और दूसरा न घात का समीकरण

$$फ(य) = प_0 य^m + प_1 य^{m-1} + प_2 य^{m-2} + प_3 य^{m-3} + \dots + प_m = 0$$

$$फा(य) = ब_0 य^n + ब_1 य^{n-1} + ब_2 य^{n-2} + \dots + ब_n = 0$$

यह दिया हुआ है। इनमें वह स्थिति जाननी है जब कि अव्यक्त का एक मान दोनों में एक ही है। इसके लिये मान लो कि  $फ(य) = 0$ । इसमें  $य$  के मान कम से  $अ_1, अ_2, अ_3, \dots, अ_m$  हैं तो इनका उत्थापन दूसरे में देने से निश्चय है कि

$$फा(अ_1), फा(अ_2), फा(अ_3), \dots, फा(अ_m)$$

इनमें कोई न कोई मान अवश्य शून्य के तुल्य होगा अर्थात्

$$फा(अ_1), फा(अ_2), फा(अ_3), \dots, फा(अ_m)$$

यह अवश्य शून्य के तुल्य होगा क्योंकि  $अ_1, अ_2, \dots$  इत्यादि में से कोई न कोई एक संख्या ऐसी होगी जिसके उत्थापन से  $फा(य) = 0$  यह स्थिति सत्य होगी अन्यथा दोनों समीकरणों में एक मान का होना कैसे संभव है। अब  $फा(अ_1), फा(अ_2), फा(अ_3), \dots, फा(अ_m)$  इसका रूप अकरणीय अमिश्र जो कि सर्वथा संभव है, क्योंकि यह  $फ(य) = 0$  इसके मानों का एक तद्रूपफल है, बनाने से प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं।

यदि  $फा(य) = 0$  इसमें अव्यक्त मान  $क_1, क_2, क_3, \dots, क_n$  हों तो

$$फा(य) = ब_0 (य - क_1) (य - क_2) \dots (य - क_n) = 0$$

इनमें  $य$  के स्थान में  $अ_1, अ_2, \dots, अ_m$  के उत्थापन से

$$फा(अ_1) = ब_0 (अ_1 - क_1) (अ_1 - क_2) \dots (अ_1 - क_n)$$



$$फा(अ_2)=ब. (अ_2 - क_1) (अ - क_2) \cdots (अ_2 - क_n) \\ \cdots \cdots \cdots$$

$$फा(अ_m)=ब. (अ_m - क_1) (अ_m - क_2) \cdots (अ_m - क_n)$$

प्रत्येक गुण खण्ड का चिन्ह बदल कर परस्पर गुण देने से और गुणनफल में  $(क_1 - अ_1) (क_1 - अ_2) \cdots (क_1 - अ_n)$  इत्यादि के स्थानों में

$$\{ फ(य)=०=प_०(य - अ_1)(य - अ_2) \cdots (य - अ_m) \\ फ(क_1)=प_०(क_1 - अ_1) (क_1 - अ_2) \cdots (क_1 - अ_m) \}$$

$$\frac{फ(क_1)}{प_०} \text{ इत्यादि का उत्थापन देने से}$$

$$प_n फा(अ_1)फा(अ_2) \cdots फा(अ_m) \\ = (-१)^{मनबम} फ(क_1)फ(क_2) \cdots फ(क_n)$$

इसलिये कह सकते हैं कि

$$प्र = (-१)^{मनबम} फ(क_1) फ(क_2) \cdots फ(क_n) \\ = प_n फा (अ_1) फा (अ_2) \cdots फा(अ_m) \\ \cdots \cdots \cdots (१)$$

क्योंकि प्र के दोनों मान अकरणीगत अभिन्न समीकरणों के पदों के फल हैं (क्योंकि अव्यक्तमान समीकरण पदों के गुणकों के रूप में आ जाते हैं) और जो तभी शून्य हो सकते हैं जब कि फ (य) और फा (य) में एक गुण खण्ड उभय निष्ठ होगा और जब  $अ_1, अ_2 \cdots$  और  $क_1, क_2 \cdots$  के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में बनाए जायेंगे तब दोनों प्र के मान एक ही हो जायेंगे।

## २०६—प्रत्युत्पन्न के गुण—

( १ ) प्रत्युत्पन्न में समीकरणों के पदों के गुणकों के वश सब से बड़ा घात अर्थात् सोपान मन होगा यह २०५ प्रक्रम के (१) के रूप ही से स्पष्ट होता है और प्रत्युत्पन्न के पहले रूप में  $(-१)^{मन} बम पम$  यह और दूसरे में  $प, बम$  यह एक पद रहेंगे ।

( २ ) यदि दोनों समीकरणों में अव्यक्तमान द गुणित हो जायं तो प्रत्युत्पन्न का मान दमन गुणित हो जायगा क्योंकि प्रत्युत्पन्न के मान में  $मन$  गुणकखण्ड प्रत्येक द गुणित हो जाने से अब नया प्रत्युत्पन्न  $दमन$  गुणित हो जायगा ।

( ३ ) दोनों समीकरणों में अव्यक्तमान यदि एक ही संख्या से बढ़ाए जायं तो प्रत्युत्पन्न ज्यों का त्यों रहेगा । क्योंकि प्रत्युत्पन्न में जो  $फ(क_१), फ(क_२)$ , इत्यादि के

$(क_१ - अ_१) (क_१ - अ_२) \dots \dots \dots (क_१ - अ_म), (क_२ - अ_१) (क_२ - अ_२) \dots \dots (क_२ - अ_म)$  इत्यादि मान हैं उनमें  $क_१, क_२ \dots$  और  $अ_१, अ_२ \dots \dots$  में एक ही संख्या मिलाने से अन्तर में कुछ विकार न होगा ।

( ४ ) ऊपर  $क_१, अ_१$ , इत्यादि के स्थान में यदि  $\frac{१}{क_१}, \frac{१}{अ_१}$ , इत्यादि का अर्थात् उनके हरात्मक मान का उत्थापन दें तो

$$क_१ - अ_१ = \frac{१}{क_१} - \frac{१}{अ_१} = \frac{अ_१ - क_१}{क_१ अ_१}; \text{ इसलिये प्रत्युत्पन्न } =$$

$$प्र' = पम बम (-१)^{मन} \frac{(अ_१ - क_१) (अ_२ - क_१) \dots \dots \dots}{(अ_१ अ_२ \dots अ_म)^न (क_१ क_२ \dots क_म)^म}$$

$$\text{परन्तु } अ_1, अ_2, \dots, अ_m = (-1)^m \frac{प_m}{प_0} \text{ और}$$

$$क_1, क_2, \dots, क_n = (-1)^n \frac{ब_n}{ब_0} \text{ इनके उत्थापन से}$$

$$प्र' = प_0' \cdot ब_0' \cdot (-1)^{मन} (अ_1 - क_1) (अ_2 - क_1, \dots) = (-1)^{मनप्र}$$

इस पर से सिद्ध होता है कि मानों के हरात्मक मानों से जो प्रत्युत्पन्न होता है वह मानों के प्रत्युत्पन्न को  $(-1)^{मन}$  इससे गुण देने से उत्पन्न होगा। यदि  $प्र = 0$  तो  $(-1)^{मन}$  से गुण देने से भी शून्य होगा; इसलिये कह सकते हो कि दोनों प्रत्युत्पन्न एक ही हैं।

$$(५) \text{ दोनों समीकरणों में } य \text{ के स्थान में } \frac{तय + द}{त'य + द'} \text{ इसके}$$

उत्थापन से जो नये दो समीकरण होंगे उनके प्रत्युत्पन्न- $प्र' = (तद' - त'द)^{मन}$  ऐसा होगा। इसकी सिद्धि के लिये कल्पना करो कि

$$फ(य) = प_0 \cdot (य - अ_1) (य - अ_2) \dots (य - अ_m)$$

$$फा(य) = ब_0 \cdot (य - क_1) (य - क_2) \dots (य - क_n)$$

$$\text{और कोई अभिन्न गुणखण्ड पहिले का } = य - अ_थ$$

$$= (त - त'अ_थ) \left( य - \frac{द'अ_थ - द}{त - त'अ_थ} \right)$$

$$\text{अभिन्न दूसरे का गुणखण्ड } = य - क_थ$$

$$= (त - त'क_थ) \left( य - \frac{द'क_थ - द}{त - त'क_थ} \right)$$

पकड़ा गुण देने से

प० के स्थान में अब प० (त-त'अ<sub>१</sub>) (त-त'अ<sub>२</sub>).....  
(त-त'अ<sub>म</sub>) होगा; ब० के स्थान में

ब० (त-त'क<sub>१</sub>) (त-त'क<sub>२</sub>).....(त-त'क<sub>न</sub>) होगा और  
अथ और कथ बदल के अब  $\frac{द'अथ-द}{त-त'अथ}$  आर

$\frac{द'कथ-द}{त-त'कथ}$  ये होंगे ।

$$इसलिये अथ-कथ = \frac{(तद'-त'द)(अथ-कथ)}{(त-त'अथ)(त-त'कथ)}$$

अथ-कथ, में थ के स्थान में १, २.....के उत्थापन से  
जितने खण्ड होंगे उनके गुणन फल को यदि भा (अथ-कथ)  
मानो तो

$$\begin{aligned} प्र' &= प० ब० भा (अथ-कथ) \\ &= प० ब० (तद'-त'द)मन भा (अथ-कथ) \\ &= (तद'-त'द)मन प्र । \end{aligned}$$

इसमें;

त' = ०, द' = १, और द = ० तो (२) उपपन्न होगा ।

त = १, त' = ० और द' = १ तो (३) उपपन्न होगा ।

त = ०, द = १, त' = १, द' = ० तो (४) उपपन्न होगा ।

इसलिये (२), (३) और (४) को अलग वालाबोध के  
लिये लिखा है ।

## २०७—लुप्तीकरण में ओलर (Euler) की रीति—

जब दो समीकरण  $f(y)=0$  और  $\phi(y)=0$ , म और न घात के एक मान समान रखते हैं तो मान लो कि

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= (y-p)f_1(y) \\ \phi(y) &= (y-q)\phi_1(y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{जहां } f_1(y) = p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \dots\dots + p_m$$

$$\phi_1(y) = q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \dots\dots + q_n$$

पदों के गुणक इनमें अज्ञात हैं।

$f_1(y)$  और  $\phi_1(y)$  से परस्पर गुण देने से (१) से

$$f(y)\phi_1(y) = \phi(y)f_1(y)$$

यह सरूप समीकरण  $m+n-1$  घात का होगा।

इसलिये  $y$  के समान घातों के गुणक समान करने से  $m+n$  समीकरण  $m+n$  स्थिराङ्क  $p_1, p_2, \dots, p_m, q_1, q_2, \dots, q_n$  से बनेंगे, जहां १६७ वें प्रक्रम की क्रिया से प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं।

जैसे मान लो कि

$$f(y) = ay^2 + by + c = 0,$$

$$\phi(y) = ay^3 + by^2 + cy = 0$$

ये दो समीकरण दिए हैं तो ऊपर की युक्ति से

$$f_1(y) = p_1 y + p_2$$

$$\phi_1(y) = q_1 y + q_2$$

$$\therefore (b_1y + b_2)(ay^2 + cy + x) \\ = (p_1y + p_2)(a_1y^2 + k_1y + x_1)$$

वा

$$(b_1a - b_1a_1)y^3 + (b_1k + b_2a - p_1k_1 - p_2a_1)y^2 \\ + (b_1x + b_2k - p_1x_1 - p_2k_1)y + b_2x - p_2x_1 \equiv 0$$

सब गुणकों को शून्य के समान करने से

$$b_1a - p_1a_1 = 0$$

$$b_1k + b_2a - p_1k_1 - p_2a_1 = 0$$

$$b_1x + b_2k - p_1x_1 - p_2k_1 = 0$$

$$b_2x - p_2x_1 = 0$$

इन पर से १६७ प्रक्रम की क्रिया से

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a_1 & 0 \\ k & a & k_1 & a_1 \\ x & k & x_1 & k_1 \\ 0 & x & 0 & x_1 \end{vmatrix} = 0 = \text{प्र}$$

२०८—लुप्तीकरण में सिलवेस्टर ( Sylvester )

की युक्ति

यह ओलर ही की ऐसी रीति है। परन्तु इससे कुछ लाघव से प्रत्युत्पन्न होता है। मान लो कि

$$f(y) = p_0y^m + p_1y^{m-1} + p_2y^{m-2} + \dots + p_m = 0$$

$$f_1(y) = b_0y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \dots + b_n = 0$$

पहिले को क्रम से  $y^{n-1}, y^{n-2}, \dots, y^2, y, y^0$  इनसे और दूसरे को क्रम से

$y^{m-1}, y^{m-2}, \dots, y^2, y, y^0$  इनसे गुण देने से  $m+n$  समीकरण बनेंगे जिनमें  $y$  का सब से बड़ा घात  $m+n-1$  रहेगा। इसलिये इन समीकरणों में  $y^{m+n-1}, y^{m+n-2}, \dots, y^2, y$  इतने भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से प्रत्युत्पन्न का मान पूर्ववत् आ जायगा। जैसे  $ay^2 + by + c = 0$ ,

$a_1y^2 + b_1y + c_1 = 0$ । इनमें ऊपर की युक्ति से पहिले को  $y, y^0$  से और दूसरे को भी  $y, y^0$  से गुण देने से

$$ay^3 + by^2 + cy = 0$$

$$ay^2 + by + c = 0$$

$$a_1y^3 + b_1y^2 + c_1y = 0$$

$$a_1y^2 + b_1y + c_1 = 0$$

इनमें  $y^3, y^2, y$  को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से पूर्ववत्

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0 = \text{प्र।}$$

यदि उर्ध्वाधरों को तिर्यक् पंक्तिओं में ले जाव तो यह वही है जो कि ओलर की क्रिया से ऊपर के प्रक्रम में सिद्ध हुआ है।

२०६—लुप्तीकरण में बेज़ौट की ( Bezout ) क्रिया

पहिले जब दोनों समीकरण तुल्य ही घात के हैं तो

( १ ) कल्पना करो कि समीकरण

$$अय^२ + कय^२ + खय + ग = ०;$$

$$अ, य^२ + क, य^२ + ख, य + ग, = ०$$

ये हैं।

दोनों को क्रम से

अ, और अ;

अ, य + क, और अय + क

अ, य<sup>२</sup> + क, य + ख, और अय<sup>२</sup> + कय + ख

से गुण कर प्रति बार परस्पर घटाने से और १८७ प्रक्रम के सङ्केत से लिखने से

$$(अक, )य^२ + (अख, )य + (अग, ) = ०$$

$$(अख, )य^२ + \{ (अग, ) + (कख, ) \} य + (कग, ) = ०$$

$$(अग, )य^२ + (कग, )य + (खग, ) = ०$$

ये समीकरण हुए, इसमें य<sup>२</sup> और य को भिन्न अव्यक्त मानने से १८७ प्रक्रम की युक्ति से

$$\begin{vmatrix} (अक, ), & (अख, ), & (अग, ) \\ (अख, ), & (अग, ) + (कख, ), & (कग, ) \\ (अग, ), & (कग, ), & (खग, ) \end{vmatrix} = ० = प्र।$$



यह प्रत्युत्पन्न एक तद्रूप कनिष्ठफल के रूप में आया है। प्रत्युत्पन्न जानने के लिये अनुगम निकालने के लिये और एक उदाहरण लेते हैं ;

कल्पना करो कि

$$\text{अय}^3 + \text{कय}^3 + \text{खय}^2 + \text{गय} + \text{घ} = 0,$$

$$\text{अ}_1\text{य}^3 + \text{क}_1\text{य}^3 + \text{ख}_1\text{य}^2 + \text{ग}_1\text{य} + \text{घ}_1 = 0 \quad ।$$

ये समीकरण हैं तो बेज़ौट ही की युक्ति से

$$\frac{\text{अ}}{\text{अ}_1} = \frac{\text{कय}^3 + \text{खय}^2 + \text{गय} + \text{घ}}{\text{क}_1\text{य}^3 + \text{ख}_1\text{य}^2 + \text{ग}_1\text{य} + \text{घ}_1} \quad ।$$

$$\frac{\text{अय} + \text{क}}{\text{अ}_1\text{य} + \text{क}_1} = \frac{\text{खय}^2 + \text{गय} + \text{घ}}{\text{ख}_1\text{य}^2 + \text{ग}_1\text{य} + \text{घ}_1} \quad ।$$

$$\frac{\text{अय}^2 + \text{कय} + \text{ख}}{\text{अ}_1\text{य}^2 + \text{क}_1\text{य} + \text{ख}_1} = \frac{\text{गय} + \text{घ}}{\text{ग}_1\text{य} + \text{घ}_1} \quad ।$$

$$\frac{\text{अय}^3 + \text{कय}^2 + \text{खय} + \text{ग}}{\text{अ}_1\text{य}^3 + \text{क}_1\text{य}^2 + \text{ख}_1\text{य} + \text{ग}_1} = \frac{\text{घ}}{\text{घ}_1} \quad ।$$

समशोधन कर एक ओर सब पदों के ले जाने से पूर्ववत् चार समीकरण बनेंगे जिनमें  $\text{य}^3$ ,  $\text{य}^2$ ,  $\text{य}$  को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान कर उनका लोप करने से

(अक <sub>१</sub> ),	(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> )
(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ) + (कख <sub>१</sub> ),	(अख <sub>१</sub> ) + (कग <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> )
(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> ) + (कग <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ) + (खग <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> )
(अघ <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> ),	(गघ <sub>१</sub> )

यह जो प्रत्युत्पन्न हुआ है वह यदि ध्यान दे कर देखो तो

(अक <sub>१</sub> ),	(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> )
(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> ),	(कख <sub>१</sub> )
(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> )
(अघ <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> ),	(गघ <sub>१</sub> )

इसके मध्यवर्ती चार ध्रुवों में

(कख <sub>१</sub> ),	(कग <sub>१</sub> )
(कग <sub>१</sub> ),	(खग <sub>१</sub> )

इसके क्रम से चारो ध्रुवों को जोड़ देने से उत्पन्न हुआ है। इसी प्रकार

$$\text{अय}^x + \text{कय}^x + \text{खय}^x + \text{गय}^x + \text{घय} + \text{ङ} = 0$$

$$\text{अ,य}^x + \text{क,य}^x + \text{ख,य}^x + \text{ग,य}^x + \text{घ,य} + \text{ङ,} = 0$$

इसका प्रत्युत्पन्न

(अक <sub>१</sub> ),	(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> )	(अङ <sub>१</sub> )
(अख <sub>१</sub> ),	(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> ),	(अङ <sub>१</sub> )	(कङ <sub>१</sub> )
(अग <sub>१</sub> ),	(अघ <sub>१</sub> ),	(अङ <sub>१</sub> ),	(कङ <sub>१</sub> )	(खङ <sub>१</sub> )
(अघ <sub>१</sub> ),	(अङ <sub>१</sub> ),	(कङ <sub>१</sub> ),	(खङ <sub>१</sub> )	(गङ <sub>१</sub> )
(अङ <sub>१</sub> ),	(कङ <sub>१</sub> ),	(खङ <sub>१</sub> ),	(गङ <sub>१</sub> )	(घङ <sub>१</sub> )

इसके मध्यवर्ती नव ध्रुवों में

(कख <sub>१</sub> ),	(कग <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ),
(कग <sub>१</sub> ),	(कघ <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> ),
(कघ <sub>१</sub> ),	(खघ <sub>१</sub> ),	(गघ <sub>१</sub> ),

क्रम से इसके नवों ध्रुवों के जोड़ने से और योग के मध्यवर्ती एक ध्रुव में (खग<sub>१</sub>) इसको मिला देने से उत्पन्न होता

है। इसी प्रकार आगे और उदाहरणों में भी जान लेना चाहिए।

(२) जहाँ दोनों समीकरण भिन्न भिन्न घात के हैं तहाँ मान लो कि समीकरण

$$अ_1 y^3 + क_1 y^2 + ख_1 y + ग_1 + घ = 0$$

$$अ_1 y^2 + क_1 y + ख_1 = 0 \text{ ये हैं।}$$

दोनों को क्रम से अ, और अ<sup>२</sup>;

$$अ_1 y + क_1 \text{ और } (अ_1 y + क_1) y^2$$

से गुण कर अन्तर करने से

$$(अ_1 y^3 + क_1 y^2 + ख_1 y + ग_1 + घ) - (अ_1 y^2 + क_1 y + ख_1) y^2 = 0$$

$$(अ_1 y^3 + क_1 y^2 + ख_1 y + ग_1 + घ) - (अ_1 y^3 + क_1 y^2 + ख_1 y + ग_1 y^2 + घ_1 y^2) = 0$$

$$(ग_1 + घ_1) y - घ_1 = 0$$

और दूसरे को य और १ से गुण देने से

$$अ_1 y^3 + क_1 y^2 + ख_1 y = 0$$

$$अ_1 y^2 + क_1 y + ख_1 = 0$$

अब चार समीकरण हुए जिनमें य<sup>३</sup>, य<sup>२</sup>, य को भिन्न भिन्न अव्यक्त मानने से

$$\begin{vmatrix} (अ_1) & , & (अ_1) & , & ग_1 & , & घ_1 \\ (अ_1) & , & (ख_1) - ग_1 & , & ग_1 + घ_1 & , & घ_1 \\ अ_1 & , & क_1 & , & -ख_1 & , & 0 \\ 0 & , & अ_1 & , & -क_1 & , & -ख_1 \end{vmatrix} = 0$$

इसी प्रकार

$$फ(य) = प_० य^म + प_१ य^{म-१} + प_२ य^{म-२} + \dots + प_m = ०$$

$$फा(य) = ब_० य^n + ब_१ य^{n-१} + ब_२ य^{n-२} + \dots + ब_n = ०$$

इनमें जहाँ  $m > n$  दूसरे समीकरण को  $य^{m-n}$  से गुण देने से  $ब_० य^म + ब_१ य^{म-१} + ब_२ य^{म-२} + \dots + ब_n य^{म-n} = ०$

यह उसी घात का हो गया जिस घात का प्रथम समीकरण है। इस समीकरण  $फा(य) = ०$  में  $n$  अव्यक्त मान के साथ  $m-n$  अव्यक्त मान जो शून्य के तुल्य हैं और मिले हैं। इसलिए प्रत्युत्पन्न के लिये  $फ(य)$  में  $m-n$  बार शून्य के उत्थापन से  $प_m$  यही रहेगा। फिर उनके परस्पर गुणन से प्रत्युत्पन्न में एक गुण्य गुणक रूप में खण्ड  $प_m^{m-n}$  यह रहेगा जो कि व्यर्थ है। इसलिये ऊपर के समीकरणों से (१) युक्ति से नीचे लिखे न समीकरण बनेंगे।

$$\frac{प_०}{ब_०} = \frac{प_१ य^{म-१} + प_२ य^{म-२} + \dots + प_m}{ब_१ य^{म-१} + ब_२ य^{म-२} + \dots + ब_n य^{म-n}}$$

$$\frac{प_० य + प_१}{ब_० य + ब_१} = \frac{प_२ य^{म-२} + प_३ य^{म-३} + \dots + प_m}{ब_२ य^{म-२} + ब_३ य^{म-३} + \dots + ब_n य^{म-n}}$$

.....

$$\frac{प_० य^{n-१} + प_१ य^{n-२} + \dots + प_{n-१}}{ब_० य^{n-१} + ब_१ य^{n-२} + \dots + ब_{n-१}}$$

$$= \frac{प_n य^{म-n} + प_{n-१} य^{म-n-१} + \dots + प_m}{ब_n य^{म-n}}$$

इनमें छेदगम से  $य$  का सबसे बड़ा  $m-१$  घात होगा। इसलिये

यम<sup>-१</sup>, यम<sup>-२</sup>, ... य, को भिन्न भिन्न अव्यक्त मानने से ऊपर न समीकरणों से और

$$ब_० यम^{-१} + ब_१ यम^{-२} + ब_२ यम^{-३} + \dots = ०$$

$$ब_० यम^{-२} + ब_१ यम^{-३} + \dots = ०$$

.....

$$ब_० यन + ब_१ यन^{-१} + \dots + ब_म = ०$$

इन म—न समीकरणों से म अक्षर पंक्ति के कनिष्ठफल के रूप में प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं जिसमें अब ऊपरी गुण्य गुणक रूप खण्ड जो कि म—न मान शून्य के मिलाने से आता था न आवेगा।

यदि फ (य) = ०, फा(य) = ० में जहां दोनों समीकरणों में घात संख्या एक ही म है, प्रत्युत्पन्न प्र हो तो

$$तफ(य) + द'फा(य) = ०,$$

$$त'फ(य) + द'फा(य) = ०।$$

इनमें प्रत्युत्पन्न = प्र' = (तद' - त'द)म प्र ऐसा होगा क्योंकि बेज़ौट की युक्ति से पहिले प्रत्युत्पन्न में जो कोई (अक्षकस) यह मान था वही इस स्थिति में

$$\left| \begin{array}{cc} तप्र_{अ} + दक_{अ}, & त'प्र_{अ} + द'क_{अ} \\ तप्र_{स} + दक_{स}, & त'प्र_{स} + द'क_{स} \end{array} \right|$$

$$= (तद' - त'द) (अक्षकस)$$

इसलिये (तद' - त'द) इस गुणक के म बार आने से

$$प्र' = (तद' - त'द)म प्र ऐसा होगा।$$

२१०—२०५वें प्रक्रम से सिद्ध है कि प्रत्युत्पन्न

$$\begin{aligned} & \text{म}=\text{प}^{\text{न}}\text{फा}(\text{अ}_1), \text{फा}(\text{अ}_2) \dots \text{फा}(\text{अ}_n) \\ & =(-1)^{\text{मन}} \text{फ}(\text{क}_1) \text{फ}(\text{क}_2) \dots \text{फ}(\text{क}_n) \end{aligned}$$

यह है इसमें फा(अ<sub>१</sub>), फा(अ<sub>२</sub>).....में अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub> का घात न रहेगा जिनके मान पहिले समीकरण के पदों के गुण हों के रूप में बनाने से गुणकों में भी सब से बड़ा घात न हो रहेगा (१६०वां प्रक्रम देखो)। इसी प्रकार फ(क<sub>१</sub>), फ(क<sub>२</sub>), इत्यादि में क<sub>१</sub>, क<sub>२</sub> इत्यादि के सब से बड़ा घात म के रहने से उनका रूप दूसरे समीकरणों के गुणकों के रूप में बनाने से गुणकों में भी सब से बड़ा घात म ही रहेगा। और उनमें घातों का परम योग नम रहेगा। इससे सिद्ध होता है कि प्रत्युत्पन्न के मान में घातों का परम योग मन रहेगा और फ(य') = ० इसके गुणकों का सब से बड़ा घात न और फा(य) = ० इसके गुणक का सब से बड़ा घात म रहेगा। यदि किसी और क्रिया से ऊपर की स्थिति न आवै तो समझना चाहिए कि वास्तव प्रत्युत्पन्न किसी ऊपरी गुणक से गुणित आया है जिसे टूट फर अलग कर देना चाहिए। जैसे

$$\text{अय}^2 + \text{कय} + \text{ख} = ०,$$

$$\text{अ,य}^2 + \text{क,य} + \text{ख,} = ०।$$

इतमें यदि दोनों को क्रम से अ<sub>१</sub>, अ और ख, ख से गुण कर अन्तर करो तो—

$$(\text{अक}_1)\text{य} + (\text{अख}_1) = ०$$

$$(\text{अख}_1)\text{य} + (\text{कख}_1) = ०$$

ऐसे समीकरण होंगे। इनमें यदि य का लोप करो तो

$$प्र = (अख_१)^२ - (अक_१)(कख_१) = ०$$

यहां देखते हैं कि दोनों समीकरणों के गुणक के घात म और न के २ के तुल्य होने से दो आप हैं और प्रत्येक पद में घातों का परम योग भी मन = ४ है। इसलिये ऊपर की स्थिति के होने से कहेंगे कि प्रत्युत्पन्न ठीक है।

$$परन्तु यदि अय^२ + कय^२ + खय + ग = ०,$$

$$अ_१य^२ + क_१य^२ + ख_१य + ग_१ = ०।$$

इनमें दोनों वा क्रम से अ\_१, अ और ग\_१, ग से गुण कर अन्तर करो तो

$$(अक_१)य^२ + (अख_१)य + (अग_१) = ०,$$

$$(अग_१)य^२ + (कग_१)य + (खग_१) = ०।$$

ऐसे समीकरण बनेंगे। इनमें य^२ और य के लोप करने से ऊपर के उदाहरण की युक्ति से

$$प्र = \left| \begin{array}{cc} (अक_१), (अख_१) \\ (अग_१), (खग_१) \end{array} \right|^२ - \left| \begin{array}{cc} (अक_१), (अख_१) \\ (अग_१), (कग_१) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (अख_१), (अग_१) \\ (कग_१), (खग_१) \end{array} \right|$$

यहां देखते हैं कि गुणकों का सब से बड़ा घात ४ अर्थात् दोनों समीकरणों के गुणकों के घात मिलाने से ८ और पद के गुणकों के घातों का योग १२ है, परन्तु प्रत्युत्पन्न के वास्तव मान में तो मिला हुआ घात ६ और पद के गुणकों के घातों का योग ६ चाहिए; इसलिये आप हुए प्रत्युत्पन्न में गुणक

गुणक रूप खण्ड कोई बढ़ गया है जिसे अलग करने से तब वास्तव प्रत्युत्पन्न होगा ।

यहां ढूंढने से तो जान पड़ेगा कि वह खण्ड (अग<sub>१</sub>) यह है जिससे भाग देने से

$$\text{वास्तव प्रत्युत्पन्न} = (\text{अग}_1)^3 - (\text{अक}_1)(\text{खग}_1)(\text{अग}_1) + \text{कग}_1(\text{खअ}_1)(\text{अग}_1) + (\text{खअ}_1)^2(\text{खग}_1) + (\text{अक}_1)(\text{कग}_1)^2 + (\text{अक}_1)(\text{कख}_1)(\text{खग}_1) ।$$

२११—यदि फ(य) = ० इसमें एक मान दो बेर हो तो स्पष्ट है कि फ'(य) = ० इसमें भी वह मान एक बेर होगा वा नफ(य) - यफ'(य) = ० इसमें वह मान एक बेर होगा । यह न-१ घात का समीकरण है; और फ'(य) भी न-१ घात का समीकरण है; इसलिये इन दोनों पर से य<sup>न-१</sup> य<sup>न-२</sup> इत्यादि का लोप करने से जो गुणकों से एक कनिष्ठफल उत्पन्न होगा उसे उत्पन्न कहो । वह जिस समय शून्य होगा उस स्थिति में कहेंगे कि वही प्रत्युत्पन्न होगा और फ(य) = ० इसमें एक मान दो बार आवेगा । जैसे

१। अ<sub>०</sub>य<sup>३</sup> + ३अ<sub>१</sub>य<sup>२</sup> + ३अ<sub>२</sub>य + अ<sub>३</sub> = ० इसमें उत्पन्न का मान बताओ ।

$$\text{फ}(य) = अ_०य^३ + ३अ_१य^२ + ३अ_२य + अ_३ = ०$$

$$\text{फ}'(य) = ३अ_०य^२ + ६अ_१य + ३अ_२ = ०$$

$$\text{नफ}(य) = ३अ_०य^३ + ६अ_१य^२ + ६अ_२य + ३अ_३ = ०$$

$$\text{यफ}'(य) = ३अ_०य^३ + ६अ_१य^२ + ३अ_२य = ०$$

$$\text{नफ}' - \text{यफ}'(य) = ३अ_१य^२ + ६अ_२य + ३अ_३ = ०$$

$$३ \text{ के अपवर्तन से } अ_१य^३ + २अ_२य + अ_३ = ०$$

$$\text{फ}'(य) \text{ में } ३ \text{ के भाग देने से } अ_०य^२ + २अ_१य + अ_२ = ०$$



२०४वें प्रक्रम से उत्पन्न

$$= ४(अ.अ. - अ.अ.) - (अ.अ. - अ.अ.)^२$$

यही जब शून्य के तुल्य होगा तब फ(य) = ० इसमें एक मान दो बार आवेगा ।

वही प्रत्युत्पन्न २०८ वें प्रक्रम से

$$\begin{vmatrix} अ. & २अ. & अ. & ० \\ ० & अ. & २अ. & अ. \\ अ. & २अ. & अ. & ० \\ ० & अ. & २अ. & अ. \end{vmatrix} = ० \text{ ऐसा होगा ।}$$

इसी प्रकार और उदाहरणों में भी जानना चाहिए ।  
२१२ । २०८ प्रक्रम में जो प्रत्युत्पन्न का मान एक कनिष्ठफल के रूप में आया है उसके प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ संख्यात्मक ध्रुव प. और व. ये ही दो होंगे । और सब शून्य होंगे । इसलिये यदि प. ध्रुव का प्रथम लघु कनिष्ठफल पा. और व. का प्रथम लघु कनिष्ठफल वा. कहो तो प्रत्युत्पन्न = प.पा. + व.वा. ऐसा होगा (१८६ प्रक्रम देखो) जहां पा. और वा. दिए हुए समीकरणों के पद गुणकों के फल हैं ।

$$प.पा. + व.वा. = प.....(१)$$

इसे स्मरण कर रखो ।

२१३—यदि

$$स = प.प. + प.प. - १ + ..... + प. = ०$$

$$स. = व.व. + व.व. - १ + ..... + व. = ०$$

इन दोनों का प्रत्युत्पन्न म हो तो २१२वें प्रक्रम से

म = प.पा. व.वा. जहां पा. और वा. समीकरणों के पद

गुणकों के फल हैं। इनके हरात्मक समीकरणों का प्रत्युत्पन्न  
 $\circ पा_0 + ब_0 बा_0$  जो कि २०६ प्रक्रम के (४) से इनके प्रत्युत्पन्न  
 के समान है। इस प्रत्युत्पन्न में  $प_0$  और  $ब_0$  के स्थान में  $प_1 - स_1$   
 और  $ब_1 - स_1$  का उत्थापन देने से

$$\circ = प_0 पा_0 - स_1 पा_0 + ब_0 बा_0 - स_1 बा_0$$

$$\therefore प_0 पा_0 + ब_0 बा_0 = स_1 पा_0 + स_1 बा_0$$

$प_t$  और  $प_{t+1}$  गुणक के वश तात्कालिक संबंध, चलन-  
 कलन से, निकालने से

$$\frac{ताप्र}{ताप_t} = य^t पा_0 + स_1 \frac{तापा_0}{ताप_t} + स_1 \frac{ताबा_0}{ताप_t}$$

$$\frac{ताप्र}{ताप_{t+1}} = य^{t+1} पा_0 + स_1 \frac{तापा_0}{ताप_{t+1}} + स_1 \frac{ताबा_0}{ताप_{t+1}}$$

मान लो कि जब  $य = अ$  तो दोनों समीकरण शून्य होते हैं  
 अर्थात् अ यह दोनों समीकरणों में  $य$  का एक मान है तब इसके  
 उत्थापन से

$$\frac{ताप्र}{ताप_t} = अ^t पा_0 \text{ और } \frac{ताप्र}{ताप_{t+1}} = अ^{t+1} पा_0$$

$$\therefore अ = \frac{\frac{ताप्र}{ताप_{t+1}}}{\frac{ताप्र}{ताप_t}}$$

$t$  के स्थान में  $0, 1, 2, 3 \dots$  के उत्थापन से

$$अ = \frac{\frac{ताप्र_1}{ताप_0}}{\frac{ताप्र_0}{ताप_0}} = \frac{\frac{ताप्र_2}{ताप_1}}{\frac{ताप्र_1}{ताप_1}} = \frac{\frac{ताप्र_3}{ताप_2}}{\frac{ताप्र_2}{ताप_2}} = \text{इत्यादि}$$

इस पर से दोनों समीकरणों में जो अव्यक्तमान एक ही है उसका मान जान सकते हो। इस प्रकार  $\Phi(y) = 0$  का यदि एक मूल दो बार हो तो इस मूल का भी पता २११ प्रक्रम के दोनों समीकरणों से लगा सकते हो।

२१४। यदि दिए हुए दो समीकरणों के मूलों के तद्रूपफल का मान निकालना हो तो नीचे की क्रिया करो।

कल्पना करो कि

$$\Phi(y) = p_0 y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \dots + p_m = 0 \quad (१)$$

जिसके मूल  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$  हैं।

$$\text{और } \Phi_1(r) = b_0 r^n + b_1 r^{n-1} + b_2 r^{n-2} + \dots + b_n = 0 \quad (२)$$

जिसके मूल  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  हैं।

कल्पना करो कि एक नया मूल ल ऐसा है कि जिसके वश से  $l = t\alpha + d\alpha$  ऐसा समीकरण बनता है।

इससे  $l$  और  $y$  के रूप में  $r$  का मान जान (२) में उत्थापन देने से एक ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें  $y$  का सब से बड़ा घात  $n$  रहेगा और जिसमें  $t, d$  और  $l$  के भी सब से बड़े घात न होंगे।

अब (१) और इस नये समीकरण में ऊपर के प्रक्रमों की किसी युक्ति से  $y$  का लोप करो तो एक ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें  $l$  का सब से बड़ा घात  $m$  होगा; इसलिये  $l$  का मान जो  $t\alpha_1 + d\alpha_1$  इस प्रकार का है वह  $m$  न विध होगा।

अब यदि ऐसी इच्छा हो कि  $\Phi(y)$  और  $\Phi_1(r)$  के पद गुणकों के रूप में यौ  $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$  इसका मान जानें तो  $l$  के वश से जो समीकरण बना है उसमें अव्यक्तमानों के  $(y + \alpha)$

घात के योग का मान निकालें उसमें त<sup>व</sup>द<sup>ध</sup> का जो गुणक होगा वही स्पष्ट है कि यौ अ, क<sup>ध</sup>, का मान होगा।

### उदाहरण

$$१। \text{अय}^१ + \text{कय}^१ + \text{खय}^२ + \text{गय} + \text{घ} = ० \quad | \text{य}^१ = १$$

इनमें य का लोप करो।

पहिले समीकरण

$$\text{अय}^१ + \text{कय}^१ + \text{खय}^२ + \text{गय} + \text{घ} = ० \text{ इसे य से गुण देने से}$$

$$\text{और } \text{य}^१ = १ \text{ से } \text{अ} + \text{कय}^१ + \text{खय}^१ + \text{गय}^२ + \text{घय} = ०$$

$$\text{फिर य से गुणने से, अय} + \text{क} + \text{खय}^१ + \text{गय}^१ + \text{घय}^२ = ०$$

$$\text{फिर य से } \text{''} \quad \text{अय}^२ + \text{कय} + \text{ख} + \text{गय}^१ + \text{घय}^१ = ०$$

$$\text{फिर य से } \text{''} \quad \text{अय}^१ + \text{कय}^२ + \text{खय} + \text{ग} + \text{घय}^१ = ०$$

घात क्रम से लिखने से

$$\text{अय}^१ + \text{कय}^१ + \text{खय}^२ + \text{गय} + \text{घ} = ०$$

$$\text{कय}^१ + \text{खय}^१ + \text{गय}^२ + \text{घय} + \text{अ} = ०$$

$$\text{खय}^१ + \text{गय}^१ + \text{घय}^२ + \text{अय} + \text{क} = ०$$

$$\text{गय}^१ + \text{घय}^१ + \text{अय}^२ + \text{कय} + \text{ख} = ०$$

$$\text{घय}^१ + \text{अय}^१ + \text{कय}^२ + \text{खय} + \text{ग} = ०$$

इनमें य<sup>१</sup>, य<sup>१</sup>, य<sup>२</sup> और य के लोप करने से

अ	क	ख	ग	घ
क	ख	ग	घ	अ
ख	ग	घ	अ	क
ग	घ	अ	क	ख
घ	अ	क	ख	ग

$$= ०$$

नीचे से तिर्यक पंक्तिओं को एक एक उठा कर ऊपर की तिर्यक पंक्ति के नीचे रखो तो वह ठीक २०२ प्रक्रम के २०वें उदाहरण के ऐसा हो जायगा।

२। ऊपर ही की युक्ति से दिखलाओ कि  $\text{अय}^2 + \text{कय} + \text{ख} = ०$  और  $\text{य}^2 = १$

इनका प्रत्युत्पन्न

$$= \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{क} & \text{ख} \\ \text{क} & \text{ख} & \text{अ} \\ \text{ख} & \text{अ} & \text{क} \end{vmatrix} = ०$$

३। ओलर की रीति से दिखलाओ कि किस स्थिति में

$$\text{फ}(य) = \text{अय}^2 + \text{कय}^2 + \text{खय} + \text{ग} = ०$$

$$\text{फा}(य) = \text{अ'य}^2 + \text{क'य}^2 + \text{ख'य} + \text{ग'} = ०$$

इनमें दो अव्यक्तमान उभयनिष्ठ होंगे।

यहां (य-१) (य-१) इस प्रकार के दो खण्ड दोनों में उभयनिष्ठ होंगे। इसलिये तीसरा खण्ड क्रम से दय + त और द'य + त' मान लिये जायें तो

$$(द'य + त') \text{फ}(य) = (दय + त) \text{फा}(य)$$

जहां द, त, द' और त' अज्ञात हैं। ऊपर के सरूप समीकरण से

$$\text{द'अ} \quad \quad \quad - \text{दअ'} \quad \quad \quad = ०$$

$$\text{द'क} + \text{त'अ} \quad - \text{दक'} \quad - \text{तअ'} \quad \quad \quad = ०$$

$$\text{द'ख} + \text{त'क} \quad - \text{दख'} \quad - \text{तक'} \quad \quad \quad = ०$$

$$\text{द'ग} + \text{त'ख} \quad - \text{दग'} \quad - \text{तख'} \quad \quad \quad = ०$$

$$\text{तग'} \quad \quad \quad - \text{तग'} \quad \quad \quad = ०$$

इन पांचो समीकरणों में से कोई चार लेकर द', त', द और त का लोप कर सकते हो। इस प्रकार लोप करने में पांच कनिष्ठफल बनेंगे जिनके मान शून्य होनेसे उदाहरण की स्थिति ठीक होगी। पांचों कनिष्ठफलों को लाघव से

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख & ग & ० \\ ० & अ & क & ख & ग \\ अ' & क' & ख' & ग' & ० \\ ० & अ' & क' & ख' & ग' \end{vmatrix} = ०$$

यहां यह दिखलाता है कि एक एक ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को मिटा देने से जो पांच कनिष्ठफल होंगे उनके मान शून्य हैं।

४। सिद्धकरो कि

$$\begin{vmatrix} अ^२ & २ अक & क^२ \\ अअ' & अक' + अ'क & कक' \\ अ'^२ & २ अ'क' & क'^२ \end{vmatrix} \equiv (अक' - अ'क)^२ = कक$$

$$अय + कर = ०,$$

$$अ'य + क'र = ०।$$

इन दोनों से १६६ प्रक्रम की युक्ति से

$$(अक' - अ'क) य = \begin{vmatrix} ० & क \\ ० & क' \end{vmatrix} = ०$$

$$\therefore (अक' - अ'क) य^२ = ० \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{और } (अय + कर)^२ = ०,$$

$$(अय + कर) (अ'य + क'र) = ०$$

$$(अ'य + क'र)^२$$

इन तीनों में  $y^2$ ,  $yr$  और  $r^2$  को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से १६६ प्रक्रम की युक्ति से

$$कफय^2 = ०$$

$$\therefore कफय^3 = ० \dots\dots\dots (२)$$

(१) और (२) के समता से ऊपर का सरूप समीकरण सिद्ध हो जायगा।

५। ऊपर की युक्ति से सिद्ध करो कि

$$\left| \begin{array}{cccc} अ^3 & ३ अ^२क & ३ अक^२ & क^३ \\ अ^२अ' & अ^२क' + २ अअ'क & २ अक'क' + अ'क^२ & कक' \\ अअ'^२ & अ'^२क + २ अअ'क' & २ अ'क'क' + अक'^२ & कक'^२ \\ अ'^३ & ३ अ'^२क' & ३ अ'क'^२ & क'^३ \end{array} \right| \equiv \begin{pmatrix} अक' \\ -अक \end{pmatrix}^3$$

$$\text{यहाँ } अय + कर = ०,$$

$$अ'य + क'र = ०।$$

इन समीकरणों से

$$(अय + कर)^3 = ०,$$

$$(अय + कर)^२ (अ'य + क'र) = ०$$

$$(अय + कर) (अ'य + क'र)^२ = ०$$

$$(अ'य + क'र)^३ = ०$$

ये चार समीकरण बना कर इनमें  $y^3$ ,  $y^2r$ ,  $yr^2$ ,  $r^3$  का लोप करो तो बाईं ओर का कनिष्ठफल उत्पन्न होगा फिर पिछले उदाहरण की युक्ति से और बातें जानो।

$$६। फ(y) = ०, फ'(y) + फ''(y) \frac{r}{१.२} + फ'''(y) \frac{r^2}{३.१} + \dots = ०$$

इनमें य को लोप कर नया समीकरण बनाओ और सिद्ध करो कि उसमें अव्यक्त मान  $f(y) = 0$  इसके दो दो मूलों के अन्तर के समान होंगे।

मान लो कि  $f(y) = (y - \alpha_1)(y - \alpha_2) \dots (y - \alpha_n)$   
य के स्थान में  $r + \alpha_1, r + \alpha_2, r + \alpha_3, \dots, r + \alpha_n$  के उत्थापनसे

$$\left. \begin{aligned} f(r + \alpha_1) &= r \{r + (\alpha_1 - \alpha_2)\} \{r + (\alpha_1 - \alpha_3)\} \dots \\ f(r + \alpha_2) &= r \{r + (\alpha_2 - \alpha_1)\} \{r + (\alpha_2 - \alpha_3)\} \dots \\ &\dots \dots \dots \\ f(r + \alpha_n) &= r \{r + (\alpha_n - \alpha_1)\} \{r + (\alpha_n - \alpha_2)\} \dots \end{aligned} \right\}$$

और साधारण से  $\frac{1}{r} f(r + \alpha_t) = f'(\alpha_t) +$

$$f''(\alpha_t) \frac{r}{1 \cdot 2} + f'''(\alpha_t) \frac{r^2}{3!} + \dots \dots \dots$$

इसमें त को १, २, ३, ... न मान कर दहिने पदों के घात को (१) इसके दहिने पद के घात के समान करो।

२१५—यदि दो समीकरण ऐने हों जिनमें दो अव्यक्त य, र हों उनमें यदि एक समीकरण में केवल  $y^m$  घात हो और कहीं किसी पद में य न रहे तो समीकरण की युक्ति से  $y^m$  का मान र के रूप में आवेगा और इस पर से य का मान जान इसका उत्थापन दूसरे में देने से एक ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमें केवल र ही रहेगा। इस प्रकार दोनों समीकरणों से एक नया समीकरण बन गया जिसमें से य निकल गया। फिर इस समीकरण की आकृति से र का ठोकर ठोकर आसन्न मान पिछले अध्यायों की युक्ति से आ जायगा जिससे य के मान का भी ज्ञान हो जायगा।



कल्पना करो कि उन दोनों समीकरणों के रूप  $आ = ०$ ,  $का = ०$  ऐसे हैं जहाँ  $आ$  और  $का$  दोनों  $य$  और  $र$  के फल हैं और गुण्य गुणक रूप खण्डों में  $आ = स स' स''$  और  $का = श श'$  ऐसा हो जाता है तो दिए हुए समीकरणों के सब मूल  $स = ०$ , और  $श = ०$ ,  $स = ०$  और  $श' = ०$ ,  $स' = ०$  और  $श = ०$   $स' = ०$  और  $श' = ०$ ,  $स'' = ०$  और  $श = ०$ ,  $स'' = ०$  और  $श' = ०$  इन समीकरणों से  $आ$  जायेंगे जो कि पहिले दोनों समीकरणों की अपेक्षा अल्प घात के होंगे।

संभव है कि दोनों समीकरण के गुण खण्डों में कोई समान हों जैसे ऊपर के उदाहरण में संभव है कि  $म = श$  ऐसा हो। ऐसी स्थिति में जो  $य$  और  $र$  के मान  $आ = ०$  इसे सत्य रखेंगे वे  $का = ०$  इसे भी सत्य रखेंगे; इसलिये  $स = ०$  इसमें चाहे  $र$  का जो मान मान उसके उत्थापन से तत्सम्बन्धी  $य$  का मान जान सकते हैं। इस प्रकार कुट्टक की युक्ति से यहाँ अनेक  $य$  और  $र$  के मान आवेंगे। यदि इस स्थिति में  $स = ०$  इसमें एक ही अव्यक्त हो तो उसका मान तो  $स = ०$  इससे परिमित होंगे और दूसरे का मान चाहे जो मान सकते हो।

२१६—कल्पना करो कि  $फ_१(य, र) = ०$  और  $फ_२(य, र) = ०$  इनमें  $य = अ_१$ ,  $र = क_१$  तो समीकरण ठीक रहते हैं। तो  $फ_१(य, क_१) = ०$  और  $फ_२(य, क_१) = ०$  ये दोनों  $य$  के  $अ_१$  तुल्यमान में सत्य रहेंगे। इसलिये दोनों समीकरण  $य - अ_१$  इससे निःशेष होंगे अर्थात्  $फ_१(य, क_१)$  और  $फ_२(य, क_१)$  का महत्तमापवर्त्तन अवश्य  $य - अ_१$  होगा। अर्थात्  $फ_१(य, क_१)$  और  $फ_२(य, क_१)$  का महत्तमापवर्त्तन जो हो उसे शून्य के

समान करने से  $y$  का एक मान  $\alpha$ , वा अनेक मान ऐसे आवेंगे जिनके वश से जब  $r = k$ , तब दोनों समीकरण ठीक रहेंगे।

कल्पना करो कि  $f_1(y, r)$  और  $f_2(y, r)$  में  $y$  के अपचित घात क्रम से पदों को रख कर महत्तमापवर्त्तन निकालने के लिये क्रिया करना आरम्भ किया और करते करते अन्त में ऐसा शेष बचा जो केवल  $r$  का फल है अर्थात् शेष  $= f(r)$  ऐसा हुआ तो जब तक  $f(r) = 0$  ऐसा न होगा तब तक  $f_1(y, r)$ ,  $f_2(y, r)$  का कोई महत्तमापवर्त्तन न होगा; इसलिये  $y$  के एक ही मानमें दोनों शून्य के समान नहीं हो सकते। यह कुछ नियम नहीं कि  $f(r) = 0$  इसमें जितने  $r$  के मान आवेंगे सब से दोनों समीकरणों की सत्यता ठीक रहेगी क्योंकि संभव है कि क्रिया करने में  $y$  के किसी घात का गुणक जो  $r$  के रूप में है भिन्न हो और  $r$  का कोई फल हर में हो जिसमें  $f(r) = 0$  इसके एक अव्यक्त मान के उत्थापन से फल शून्य के समान हो ऐसी दशा में उस राशि का मान अनन्त होगा जो कि यहाँ पर उचित नहीं। जैसे यदि

$$f_1(y, r) = l f_2(y, r) + f(r)$$

तो यदि  $l = l$  बिध अभिन्न हा तो परिमिति के मान के उत्थापन से अनन्त नहीं होगा; इसलिये  $f(r) = 0$  और  $f_2(y, r) = 0$  इन पर से जो  $y$ , और  $r$  के मान होंगे उनके उत्थापन से  $f_1(y, r) = 0$  यह ठीक शून्य ही होगा; इसलिये कहेंगे कि  $y$  और  $r$  के मान ठीक हैं। परन्तु यदि  $l$  भिन्न हो और उसके हर में  $r$  का कोई फल हो तो संभव है कि  $f(r) = 0$ ,  $f_2(y, r) = 0$  इनसे जो  $r$  का मान हो उसके

उत्थापन से  $\text{लफ}_2(y, r) = \infty$  वा  $\text{लफ}_2(y, r) = 0$  ऐसा हो, वैसे ही स्थिति में  $\text{फ}_1(y, r) = \infty$  वा  $\text{फ}_1(y, r) = 0$  ऐसा होगा जो कि समीकरण की स्थिति से अशुद्ध है। यदि एक गुणक  $x$ , जो कि केवल  $r$  का फल है इससे  $\text{फ}_1(y, r)$  को गुण  $\text{फ}_2(y, r)$  इसका भाग दें जिसमें लब्धि अभिन्न आवे तो अब

$x, \text{फ}_1(y, r) = \text{लफ}_2(y, r) + \text{फ}(r)$  ऐसी स्थिति होगी। यहां  $\text{फ}(r) = 0$ ,  $\text{फ}_2(y, r) = 0$  इनसे जो  $y$  और  $r$  आवेंगे उनके उत्थापन से अवश्य अब  $\text{ल}$  के अभिन्न होने से  $\text{लफ}_2(y, r) + \text{फ}(r) = 0$  ऐसा होगा; इसलिये  $x, \text{फ}_1(y, r)$  यह भी शून्य के समान होगा परन्तु यह नहीं कह सकते कि  $\text{फ}_1(y, r) = 0$  ऐसा हो क्योंकि संभव है कि  $x = 0$  हो। इसलिये यहां पर यह विचारणीय है कि कौन  $y$  और  $r$  के मान ठीक होंगे।

$y$  और  $r$  के मान जानने के लिये M. M. Labatie and Sarrus की रीति दिखलाते हैं। महत्तमापवर्त्तन जानने के लिये यदि लब्धि भिन्न आती हो तो  $x$  जो कि  $r$  का कोई फल है उससे भाज्य को गुण कर तब भाग दो और शेष में यदि शि जो कि  $r$  का फल है इसका निःशेष भाग जाता हो तो उससे भाग दे कर लब्धि को शेष कहो।

२१८—मान लो कि  $A = 0$ ,  $K = 0$  ये दो समीकरण हैं जिन दोनों में ऐसे कोई गुण खण्ड नहीं हैं जा केवल  $r$  के फल हों और  $A$  की अपेक्षा का में  $y$  का अल्प घात है।  $x$  गुणक से  $A$  को गुणने से और  $K$  का भाग देने से लब्धि  $\text{ल}$  और शेष शि जो जहां शि का कोई फल है।

फिर शे से का में भाग देने से ऊपर के सब पदार्थ ख<sub>१</sub>, ल<sub>१</sub>, शि<sub>१</sub>, शे<sub>१</sub> समझो। इस तरह क्रिया करते करते मान लो कि चौथे बार शि<sub>३</sub> और शे<sub>३</sub>=१ तो

$$\left. \begin{aligned} \text{ख आ} &= \text{ल का} + \text{शि शे} \\ \text{ख}_1 \text{ का} &= \text{ल}_1 \text{ शे}_1 + \text{शि}_1 \text{ शे}_1 \\ \text{ख}_2 \text{ शे}_2 &= \text{ल}_2 \text{ शे}_2 + \text{शि}_2 \text{ शे}_2 \\ \text{ख}_3 \text{ शे}_3 &= \text{ल}_3 \text{ शे}_3 + \text{शि}_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(१)$$

अब मान लो कि ख और शि का महत्तमापवर्त्तन ग<sub>१</sub>,

$$\frac{\text{खख}_1}{\text{ग}} \text{ और शि}_1 \text{ का महत्तमापवर्त्तन ग}_1, \frac{\text{खख}_2}{\text{गग}} \text{ और शि}_2$$

$$\text{का महत्तमापवर्त्तन ग}_2 \text{ और } \frac{\text{खख}_1 \text{ ख}_2 \text{ ख}_3}{\text{गग}_1 \text{ ग}_2} \text{ और शि}_3 \text{ का महत्तमा-}$$

पवर्त्तन ग<sub>३</sub> है तो

$$\left. \begin{aligned} \frac{\text{शि}}{\text{ग}} &= 0, \text{ और का} = 0 \\ \frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1} &= 0, \text{ और शे}_1 = 0 \\ \frac{\text{शि}_2}{\text{ग}_2} &= 0, \text{ और शे}_2 = 0 \\ \frac{\text{शि}_3}{\text{ग}_3} &= 0, \text{ और शे}_3 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(२)$$

इन समीकरणों से य और र के जो मान होंगे वे ही आ=० और का=० इन दोनों में भी य और र के मान होंगे।

(१) इन में से पहिले समीकरण में ग का भाग देने से

$$\frac{\text{ख}}{\text{ग}} \text{ आ} = \frac{\text{ल}}{\text{ग}} \text{ का} + \frac{\text{शि}}{\text{ग}} \text{ शे} \dots\dots\dots(३)$$

ख और शि का महत्तामपवर्त्तन ग है; इसलिये  $\frac{ख}{ग}$ ,  $\frac{शि}{ग}$  के अभिन्न होने से  $\frac{ल}{ग}$  भी अभिन्न होगा क्योंकि ग केवल र का फल है और का में केवल र के फल का गुणखण्ड नहीं है ऐसा पहले ही मान लिया है, इसलिये का और ग परस्पर दृढ़ हैं। (३) से स्पष्ट है कि  $\frac{शि}{ग} = ०$ , का = ० य और र के जितने मान आवेंगे उनके उत्थापन से  $\frac{ख}{ग}$  आ यह भी शून्य होगा परन्तु ग के महत्तामपवर्त्तन होने से  $\frac{ख}{ग}$  और  $\frac{शि}{ग}$  इनमें अब उभयनिष्ठ गुणखण्ड कोई न होंगे। इसलिये जिस मान में  $\frac{शि}{ग}$  शून्य होगा उस मान में  $\frac{ख}{ग}$  यह शून्य न होगा; इसलिये (३) के सत्य होने से आ = ० ऐसा होगा; इसलिये  $\frac{शि}{ग} = ०$  और का = ० इनमें के सब अव्यक्त मान आ = ०, का = ० इनमें भी रहेंगे। (३) के दोनों पक्षों को ख, से गुण देने से और ख, का के स्थान में (१) के दूसरे समीकरण का उत्थापन देने से  $\frac{ख}{ग}$  ख, आ =  $\frac{ख, शि + ल ल, शे + ल शि, शे, शि और ल के ग से अभिन्न होने से \frac{ख, शि + ल ल,}{ग}$  यह अभिन्न होगा और दोनों पक्षों में ग, के भाग से पूर्ववत् सिद्ध कर सकते हो कि  $\frac{ख, शि + ल ल,}{ग ग,}$  यह भी अभिन्न होगा।

$$भा = \frac{ख}{ग} \text{ और } \frac{ख, शि + ल ख,}{ग ग,} = भा, \text{ मान लेने से}$$

$$\frac{ख ख,}{ग ग,} भा = भा, शे + \frac{शि,}{ग,} भा शे, \dots\dots\dots (४)$$

(१) के दूसरे समीकरण को  $\frac{ख}{ग}$  से गुण देने से

$$\frac{ख ख,}{ग} का = \frac{ख ख,}{ग} शे + \frac{ख}{ग} शि, शे,$$

ग,  $\frac{ख ख,}{ग}$  और शि, को निःशेष करता है; इसलिये शे के

केवल र का फल न होने से  $\frac{ख ल,}{ग}$  का भी ग, निःशेष करेगा;

इसलिये लाघव से  $\frac{ख}{ग} = ना, \frac{ख ल,}{ग ग,} = ना, \text{ मान लेने से}$

$$\frac{ख ख,}{ग ग,} का = ना, शे + \frac{शि,}{ग,} ना शे, \dots\dots\dots (५)$$

(४) और (५) से स्पष्ट है कि  $\frac{शि,}{ग,} = ०, शे = ०$ । इनसे

ब और र के जितने मान होंगे सब के उत्थापन से ऊपर की युक्ति से भा = ० और का = ० ठीक रहेंगे; इसलिये  $\frac{शि,}{ग,} = ०, शे = ०$ , इनके सब मूल भा = ०, का = ० इनमें होंगे।

(४) के दोनों पक्षों को  $\frac{ख,}{ग,}$  से गुण देने से  $\frac{ख,}{ग,}$  का उत्थापन (१) के तीसरे समीकरण से देने से

$$\frac{ख ख_१ ख_२}{ग ग_१} आ = \left( ल_२ मा_१ + \frac{ख_२ शि_१}{ग_१} मा \right) शे, \\ + शि_२ मा_१ शे_२$$

महत्तमापवर्त्तन होने से ग<sub>२</sub> प्रथम पक्ष और शि<sub>१</sub> को निःशेष करता है; इसलिये ऊपर ही की युक्ति से ग<sub>२</sub>, शे<sub>१</sub> में केवल र का फल गुण खण्डन होने से,  $\left( ल_२ मा_१ + \frac{ख_२ शि_१}{ग_१} मा \right)$  को निःशेष करेगा।

मान लो कि निःशेष करने से लब्धि मा<sub>२</sub> है तो

$$\frac{ख ख_१ ख_२}{ग ग_१ ग_२} आ = मा_२ शे_१ + \frac{शि_२}{ग_२} मा_१ शे_१ \dots\dots (६)$$

(५) के दोनों पक्षों को ख<sub>२</sub> से गुण देने से और ख<sub>२</sub> शे के स्थान में (१) के तीसरे समीकरण का उत्थापन देने से

$$\frac{ख ख_१ ख_२}{ग ग_१} का = \left( ल_२ ना_१ + \frac{ख_२ शि_१}{ग_१} ना \right) शे, \\ + शि_२ ना_१ शे_२$$

पूर्ववत् फिर सिद्ध कर सकते हो कि  $\left( ल_२ ना_१ + \frac{ख_२ शि_१}{ग_१} ना \right)$  यह ग<sub>२</sub> से निःशेष होगा और मान लो कि लब्धि ना<sub>२</sub> आई तो

$$\frac{ख ख_१ ख_२}{ग ग_१ ग_२} का = ना_२ शे_१ + \frac{शि_२}{ग_२} ना_१ शे_१ \dots\dots (७)$$

(६) और (७) से स्पष्ट है कि  $\frac{शि_1}{ग_2} = 0$ ,  $शे_1 = 0$ , इनमें जितने अव्यक्त मान होंगे वे सब  $आ = 0$  और  $का = 0$  इनमें भी होंगे।

इसी प्रकार (६) और (७) के दोनों पक्षों को ख<sub>१</sub> से गुण कर और ख<sub>१</sub> शे<sub>१</sub> का उत्थापन (१) के चौथे समीकरण से देने से पूर्ववत् क्रिया करने से

$$\frac{ख_1 ख_1, ख_2 ख_1}{ग_1 ग_1, ग_2 ग_1} आ = मा_1 शे_1 + \frac{शि_1}{ग_2} मा_2 \dots\dots (८)$$

$$\frac{ख_1 ख_1, ख_2 ख_1}{ग_1 ग_1, ग_2 ग_1} का = ना_1 शे_1 + \frac{शि_1}{ग_2} ना_2 \dots\dots (९)$$

ऐसे समीकरण बनेंगे जिन से पूर्ववत् सिद्ध कर सकते हो कि  $\frac{शि_1}{ग_2} = 0$  और  $शे_1 = 0$  इनमें जितने अव्यक्तमान होंगे वे सब  $आ = 0$  और  $का = 0$  इनमें भी अव्यक्तमान होंगे। इससे सिद्ध हुआ कि (२) समीकरण परम्परा से जितने अव्यक्तमान आवेंगे सब के उत्थापन से  $आ = 0$  और  $का = 0$  ये दोनों समीकरण सत्य रहेंगे।

अब इतना और दिखाना है कि  $आ' = 0$ ,  $का = 0$ , इनमें जितने अव्यक्तमान होंगे वे सब (२) समीकरण परम्परा के अव्यक्तमानों के अन्तर्गत हैं।

(३) को थोड़ा परिवर्तन करने से

$$ना आ - मा का = \frac{शि}{ग} शे \dots\dots\dots (१०)$$



ऐसे लिख सकते हैं ।

$$(४) \text{ को का और } (५) \text{ वें को आ से गुण कर घटा देने से} \\ (मा_१का - ना_१आ) शे + (मा_१का - ना_१आ) \frac{शि_१}{ग_१} शे = ०$$

(१०) वें से

$$(मा_१का - ना_१आ) शे - \frac{शि_१शि_१}{ग_१ग_१} शे शे = ०$$

इसलिये

$$मा_१का - ना_१आ = \frac{शि_१शि_१}{ग_१ग_१} शे, \dots\dots\dots (११)$$

(६) वें को का से और (७) वें को आ से गुण कर घटा देने से

$$(मा_२का - ना_२आ) शे + (मा_१का - ना_१आ) \frac{शि_२}{ग_२} शे = ०$$

और (११) वें से

$$(मा_२का - ना_२आ) शे + \frac{शि_१शि_२}{ग_१ग_२} शे शे = ०$$

इसलिये

$$मा_२का - ना_२आ = - \frac{शि_१शि_२}{ग_१ग_२} शे, \dots\dots\dots (१२)$$

इसी प्रकार (८) वें और (९) वें से

$$मा_३का - ना_३आ = \frac{शि_१शि_२शि_३}{ग_१ग_२ग_३} \dots\dots\dots (१३)$$

(१३) वें से स्पष्ट है कि जितने श और र के मान हैं

और ३१ शून्य होंगे उतने मानों में  $\frac{शि_1, शि_2, शि_3}{ग_1, ग_2, ग_3}$  यह भी शून्य

होगा; इसलिये इसके गुण खण्डों  $\frac{शि}{ग}, \frac{शि_1}{ग_1}, \frac{शि_2}{ग_2}$  और  $\frac{शि_3}{ग_3}$  में

एक एक अवश्य शून्य होंगे।

इसलिये  $\frac{शि}{ग}=0, \frac{शि_1}{ग_1}=0, \frac{शि_2}{ग_2}=0$  और  $\frac{शि_3}{ग_3}=0$ , इनसे जितने  $र$  के मान आवेंगे उनके अन्तर्गत ही  $आ=0$  और  $का=0$  के  $र$  के मान होंगे।

कल्पना करो कि जब  $य=अ$ , और  $र=क$  तब  $आ=0$  और  $का=0$  ये ठीक हो जाते हैं तो यदि  $\frac{शि}{ग}=0$  इसमें भी एक मान  $क$

हो तो  $य=अ$ , और  $र=क$  में  $\frac{शि}{ग}=0$  और  $का=0$  ऐसा होगा।

यदि  $क, \frac{शि}{ग}=0$  इसमें  $का$  अव्यक्त मान न हो किन्तु  $\frac{शि_1}{ग_1}=0$

इसमें  $का$  एक अव्यक्त मान हो तो  $क$  के उत्थापन से  $\frac{शि}{ग}$  के न

शून्य होने से (१०) वें से  $य=0$  और  $र=क$  में  $\frac{शि_1}{ग_1}=0$

और  $शे=0$  होगा।

यदि  $क, \frac{शि}{ग}=0, \frac{शि_1}{ग_1}=0$ , इन दोनों में अव्यक्त मान न

हो किन्तु  $\frac{शि_2}{ग_2}=0$  इसमें  $का$  एक अव्यक्त मान हो तो ऊपर ही

की युक्ति से और (११) वें से  $y = x$ , और  $r = k$  में  $\frac{शि_2}{ग_2} = 0$   
और  $शे_1 = 0$  होगा।

फिर कल्पना करो कि  $k, \frac{शि_1}{ग_1} = 0, \frac{शि_2}{ग_2} = 0, \frac{शि_3}{ग_3} = 0$

इन में का अव्यक्त मान नहीं है किन्तु  $\frac{शि_3}{ग_3} = 0$  इसमें का एक  
अव्यक्त मान है तो  $y = x$  और  $r = k$  में (१२) वें से  
 $\frac{शि_3}{ग_3} = 0$  और  $शे_2 = 0$  होगा। इसपर से ऊपर की बात सिद्ध  
हो जाती है।

$\frac{शि_1}{ग_1} \frac{शि_2}{ग_2} \frac{शि_3}{ग_3} = 0$  इस समीकरण को जिस पर  $x$   
 $r$  के सब मान आते हैं  $r$  के रूप में प्रधान समीकरण कहते हैं।

### उदाहरण

$$१। (r-1)y^2 + ry + r^2 - 2r = 0, (r-1)y + r = 0$$

इन में  $y$  और  $r$  का मान बताओ।

$$\text{यहाँ } x = (r-1)y^2 + ry + r^2 - 2r$$

$$k = (r-1)y + r$$

$$x = 1, k = y, शि = r^2 - 2r, शे = 0$$

∴  $x$  और  $शि$  का महत्तमापवर्त्तन  $ग = 1$

(२) समीकरण परम्परा से

$$\frac{\text{शि}}{\text{ग}} = \text{र}^2 - २\text{र} = ० \text{ और का} = (\text{र}-१) \text{ य} + \text{र} = ० \text{ इन से}$$

य और र का मान जान लो ।

$$२। (\text{र}-१) \text{ य}^३ + \text{र}(\text{र}+१) \text{ य}^२ + (३ \text{ र}^२ + \text{र}-२) \text{ य} + २\text{र} = ० \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{और } (\text{र}-१) \text{ य}^३ + \text{र}(\text{र}+१) \text{ य} + ३ \text{ र}^२ - १ = ० \dots\dots\dots (२)$$

इनमें य और र के मान के लिये समीकरण बनाओ ।

(१) को आ और (२) को का कहो तो

$$\text{ख} = १, \text{ ल} = \text{य}, \text{ शिशे} = (\text{र}-१) \text{ य} + २\text{र} \therefore \text{शि} = १ \text{ और शे} = (\text{र}-१) \text{ य} + २\text{र}।$$

$$\text{फिर ख}_१ = १, \text{ ल}_१ = \text{य} + \text{र}, \text{ शि}_१, \text{ शे}_१ = \text{र}^२ - १ \therefore \text{शि}_१ = \text{र}^२ - १, \text{ शे}_१ = १।$$

ख और शि का महत्तमापवर्त्तन ग = १, परन्तु र के न रहने से यह व्यर्थ है ।

$$\frac{\text{खख}_१}{\text{ग}} = \frac{१}{१} = १ \text{ और शि}_१ = \text{र}^२ - १ \text{ का महत्तमापवर्त्तन}$$

$$\text{ग}_१ = १$$

$$\text{इसलिये } \frac{\text{शि}_१}{\text{ग}_१} = \text{र}^२ - १ = ०, \text{ शे} = (\text{र}-१) \text{ य} + २\text{र} = ०।$$

इस पर से य और र के मान जान लो ।

$$३। \text{रय}^३ - (\text{र}^३ - ३\text{र}-१) \text{ य} + \text{र} = ०, \text{ य}^२ - \text{र}^२ + ३ = ०$$

$$\text{इनमें ख}=१, \text{ ल}=र\text{य}, \text{ शि}=१, \text{ शे}=\text{य} + \text{र}।$$

$$ख_1 = 1, ल_1 = य - 1, शि_1 = 1, शे_1 = 1$$

अ और शि का महत्तमापवर्त्तन  $ग = 1$  और  $\frac{खख_1}{ग} = 1$  और

शि<sub>1</sub> = 1 का महत्तमापवर्त्तन  $ग_1 = 1$ , इसलिये यहाँ  $\frac{शि}{ग} = 1 = 0$  यह

असंभव और  $\frac{शि_1}{ग_1} = 1 = 0$  यह भी असंभव होने से कहेंगे कि

प्रश्न खिल है।

$$४। य^३ + ३रय^२ - ३य^२ + ३र^२य - ६रय - य + र^३ - ३र^२ \\ - र + ३ = 0 = आ,$$

$$\text{और } य^३ - ३रय^२ + ३य^२ + ३र^२य - ६रय - य - र^३ + ३र^२ \\ + र - ३ = 0 = का$$

इनमें ख = १, पहिला शेष अर्थात् शिश =  $३(र - १)(३य^२र^२ - १र - ३)$

$$\therefore \text{शि} = र - १, \text{शे} = ३य^२ + र^२ - १र - ३।$$

$$ख_१ = ३, \text{शि}_१\text{शे}_१ = ८(र^२ - २र)य, \therefore \text{शि}_१ = र^२ - २र, \text{शे}_१ = ८य$$

$$ख_२ = ८, \text{शि}_२\text{शे}_२ = र^२ - २र - ३ \therefore \text{शि}_२ = र^२ - २र - ३,$$

शे<sub>२</sub> = १, ख = १ और शि = र - १ का महत्तमापवर्त्तन  $ग = १$  और

$$\frac{खख_१}{ग} = ३ \text{ और}$$

शि<sub>१</sub> = र<sup>२</sup> - २र का महत्तमापवर्त्तन  $ग_१ = १$  और  $\frac{खख_१\text{ख}_२}{ग\text{ग}_१}$

$= 1 \times 1 \times 1 = 1$  का और  $शि_2 = r^2 - 2r - 3$  का महत्तमापवर्त्तन  $g_2 = 1$  हुआ।

इसलिये  $\frac{शि}{म} = 1 - 1 = 0$ , का  $= 0$ ,  $\frac{शि}{ग_1} = r^2 - 2r - 3 = 0$ , शे

$= 1r^2 + r^2 - 2r - 3 = 0$  और  $\frac{शि_2}{ग_2} = r^2 - 2r - 3 = 0$ ; शे,

$= 0$  वा  $y = 0$

और प्रधान समीकरण  $r$  के रूप में

$(r-1)(r^2-2r-3)(r^2-2r-3) = 0$  यह हुआ।

५।  $(r-1)y^2 - 2y + 4r - 2 = 0 =$  आ

और  $4r^2 - 2y + 4r = 0 =$  का इनमें  $y$  और  $r$  के लिये समीकरण परम्परा बनाओ।

यहां आ को  $r$  से गुणकर तब का के भाग देने से न अभिन्न आता है; इसलिये  $ख = r$  और  $शि शे = (3r-10)y + r^2 + 4r$   $\therefore$   $शि = 1$ ,  $शे = (3r-10)y + r^2 + 4r$ । शे का भाग  $r$  में देने के लिये और  $ल_1$  को अभिन्न होने के लिये  $का$  को पहिले  $3r-10$  से गुण देने से फिर  $3r-10$  से गुण देने से अर्थात्  $का$  को  $(3r-10)^2$  से गुण देने से  $ख_1 = (3r-10)^2$ ,

$शि, शे = r^2 + 12r^2 + 64r^2 - 200r^2 + 1000r$ ।

इसलिये  $शि_1 = r^2 + 12r^2 + 64r^2 - 200r^2 + 1000r$  और  $शे_1 = 1$ ।

ख और शि का महत्तमापवर्त्तन  $ग = 1$ । और  $\frac{ख_1}{ग} =$

$\frac{r(1r-10)^2}{1} = r(1r-10)^2$  और शि, का महत्तमापवर्त्तन  $ग_1 = r$  है ।

इसलिये  $\frac{शि}{ग} = \frac{1}{1} = 1 = 0$  असंभव होने से

$$\frac{शि_1}{ग_1} = \frac{r^2 + 12r^2 + 29r^2 - 200r^2 + 100r}{r}$$

$$= r^2 + 12r^2 + 29r^2 - 200r + 100 = 0, \text{ से } =$$

$$(3r-10) य + r^2 + 6r = 0$$

इनसे य और र के मान विदित हो जायंगे ।

२२०। २१६ प्रक्रम के (३) से जब सिद्ध है कि  $\frac{ल}{ग}$  यह अभिन्न

ल' के बराबर होगा तब कह सकते हो कि ल का एक छोटा मान ऐसा हो सकता है कि जिसके वश से सर्वदा  $ग=1$  हो । इसी प्रकार ल<sub>१</sub>, ल<sub>२</sub>, ..... के मान ऐसे ले सकते हैं जिसमें ल<sub>१</sub>, और शि<sub>२</sub> का, ल<sub>२</sub> और शि<sub>२</sub> का, इत्यादि का महत्तमापवर्त्तन १ ही हो । इसलिये  $\frac{ल ल_१}{ग}$  और शि, का महत्तमापवर्त्तन  $= ग$ , ( $ग = 1$  और ल, और शि, के परस्पर दृढ़ होने से) वही होगा जो कि ल और शि, का होगा । और  $\frac{ल ल_१}{ग_१}$  और शि, का महत्तमापवर्त्तन  $ग_१$  होगा । इस प्रकार आगे भी जान लेना चाहिए ।

यदि अन्त में नि जैसा कि २१६ वें प्रक्रम में मान लिया

है कि शि, यह य से स्वतन्त्र है, शून्य के तुल्य होता है, यह आ और का का महत्तमापवर्त्तन होगा। इसलिये शे, = ० इस पर से २१७ प्रक्रम की युक्ति से य और र के अनन्त मान आ सकते हैं, और  $\frac{आ}{श_२} = ०$ , और  $\frac{का}{श_२} = ०$  इन समीकरणों से पूर्ववत् क्रिया करने से य और र के परिमित मान भी आबेंगे और तब (२) की समीकरण परम्परा में श<sub>२</sub> के भाग दे देने से

$$\frac{शि}{ग} = ० \text{ और } \frac{का}{श_२} = ०, \frac{शि_१}{ग_१} = ० \text{ और } \frac{शे}{श_२} = ०, \frac{शि_२}{ग_२} = ० \text{ और } \frac{शे_१}{श_२} = ०$$

इनसे य और र के उन परिमित मानों का पता लगा सकते हो।

$$\begin{aligned} \text{जैसे } य^३ + र य^२ - (र^२ + १) य + र - र^३ &= ० \text{ आ} \\ य^३ - र य^२ - (र^२ + ६ र + ६) य + र^३ + ६ र^२ + ६ र &= ० \text{ का} \\ \text{यहां का से आ में भाग देने से ख} &= १ \text{ और पहिला शेष} \\ &= २(र य^२ + (३ र + ४) य - (र^३ + ३ र^२ + ४ र)) \end{aligned}$$

$$\text{इसलिये शि} = २, \text{ शे} = र य^२ + (३ र + ४) य - (र^३ + ३ र^२ + ४ र)$$

शे से का में भाग देने में का को र से गुण देने से फिर एक बार भाग दे देने पर अभिन्न लब्धि के लिये र से गुण देने से अर्थात् का को र^२ से गुण देने से।

$$\text{का}_१ = २, \text{ शि}_१, \text{ शे}_१ = (र^२ + ३ र + २)(य - र)$$

$$\text{इसलिये शि}_१ = २(र^२ + ३ र + २) \text{ और शे}_१ = य - र$$



शे, से शे में भाग देने से शेष कुछ नहीं बचता इसलिये  
 $शि_2 = 0$  तब ऊपर की क्रिया से  $शे_1 = य - र = 0$  इस पर से य और  
 र के अनेक मान आवेंगे और  $\frac{शि_1}{ग_1} = 4(र^2 + ३र + २) = 0$

वा  $३र^2 + ३र + २ = 0$  और  $\frac{शे}{ग_1} = यर + र^2 + ३र + ४ = 0$  इनसे परि-  
 मित य और र भी आवेंगे।

२१८ प्रक्रम की क्रिया में यह मान लिया गया है कि य और  
 र के अनन्त मान नहीं हैं। अर्थात् आ और का के महत्तमा-  
 पवर्त्तन से आ और का के भाग देकर जो लब्धि आवे उसे  
 आ और का के स्थान में रख कर तब २१८ वें प्रक्रम से सर्वदा  
 क्रिया का आरम्भ करो।

### अभ्यास के लिये प्रश्न

१। सिद्ध करो कि  $य + र = ०$ ,  $य^२ - र^२ + ३ = ०$  ऐसे दो  
 समीकरण नहीं हो सकते।

२।  $य + र - ४ = ०$ ,  $य^२ + र^२ - ८२ = ०$  इनमें य और र के मान  
 बताओ।

$$\text{यहाँ शि} = (४ - र)^२ + र^२ - ८२, \text{ख} = १$$

$$\therefore \frac{शि}{ग} = (४ - र)^२ + र^२ - ८२ = ०, \text{का} = य + र - ४ = ०$$

३।  $य^२ + य र + र^२ - ४६ = ०$ ,  $य^२ + य^२ र^२ + र^२ - ६३१ = ०$   
 इनमें य और र के मान बताओ।

$$\text{यहाँ ख} = १, \text{शि} = -६८, \text{शे} = य र - १५, \text{ख, र}^२, \\ \text{शि}_1 = र^२ - ३४र^२ + २२४$$

शे, = १, ख और शि का महात्मापवर्तन ग = १,

$\frac{ख ख}{ग} = २^२$ , शि, =  $२^२ - २४२^२ + २२५$  का महात्मापवर्तन ग, = १

$$\therefore \frac{शि}{ग} = २^२ - २४२^२ + २२५ = ० \text{ और } शे = ५२ - १५ = ०$$

४।  $य^२ + २^२ - (य + २) - अ = ०$ ,  $य^२ + २^२ + य + २ - २(य^२ + २^२) - क = ०$  इनमें य और २ के मान के लिये समीकरण बनाओ।

यहाँ ख = १, शि = २ ( $२^२ - २ - अ$ ) +  $२अ$ ,  $२^२ - २ - अ$  +  $अ^२ - अ - क$ , शे = १, ख और शि का महात्मापवर्तन ग = १

$$\therefore \frac{शि}{ग} = २ (२^२ - २ - अ) + २अ, २^२ - २ - अ + अ^२ - अ - क = ०$$

$$\text{और } का = ५^२ + २^२ - (य + २) - अ = ०$$

यदि समीकरण को तोड़ कर अथ्यक के मान ले आओ तो

$$य (य - १) = \frac{१}{३} \{ अ \pm \sqrt{(२ अ + २ क - अ^२)} \}$$

$$२ (२ - १) = \frac{१}{३} \{ अ \pm \sqrt{(२ अ + २ क - अ^२)} \}$$

$$५। य^२ + २२२^२ + (२२^२ - २ + १)य + २^२ - २^२ + २२ = ०,$$

$य^२ + २२य + २^२ - २ = ०$ , इनमें य और २ के मान के लिये समीकरण बनाओ।

यहाँ  $२^२ - २ = ०$ ,  $य + २ = ०$  ऐसे समीकरण बनेंगे।

$$६। य^२ + २२२^२ + २२(२ - २)य + २^२ - ४ = ०$$

$य^२ + २२य + २२^२ - ४ + २ = ०$  इनमें य और २ के मान जानने के लिये समीकरण बनाओ।

यहां  $r-2=0$ ,  $y^2-2xy+2x^2-4x+2=0$  और  
 $x^2-4x+6=0$ ,  $y+x+2=0$  ऐसे समीकरण बनेंगे। और  $r$   
 के रूप में प्रधान समीकरण

$$(r-2)(r^2-4r+6)=0 \text{ ऐसा होगा।}$$

## १७-प्रकीर्णक ।

१२१। चलस्पद्धी, अचलस्पद्धी ।

१२६ वें प्रक्रम में जो  $y$  का मान है उसे लाघव से

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) (y, 1)^n$$

इस सङ्केत से प्रकाश करते हैं ।

इसी प्रकार  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) (y, r)^n$

$$= a_0 y^n + n a_1 y^{n-1} r + \frac{n(n-1)}{2!} a_2 y^{n-2} r^2$$

+ ..... +  $n a_{n-1} y r^{n-1} + a_n r^n$  ऐसा मान  
 सकते हो ।

$s_n = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) (y, 1)^n$  इसमें अव्यक्त  
 मान क्रम से  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$  समझो तो यदि इनके अन्तर  
 से बना एक तद्रूप और ध्रुवशक्तिक फल का हो जिसमें सोपान  
 की संख्या से हो तो फा में  $i_1, i_2, \dots, i_n$  के स्थान में

$\frac{1}{i_1 - y}, \frac{1}{i_2 - y}, \dots, \frac{1}{i_n - y}$  इनके उत्थापन से जो फा का

मान हो उसे अभिज्ञ करने के लिये स<sup>म</sup> इससे गुण देनेसे यदि गुणनफल में य रहे तो गुणनफल को स<sup>म</sup> का चलस्पर्दी और यदि न रहे तो उसे स<sup>म</sup> का अचलस्पर्दी कहते हैं।

यदि फा में प्रत्येक अव्यक्तमान का समान ही घात हो  
 हो तो ऊपर की परिभाषा से सन का अवलम्बित फा (अ,  
 अ<sub>१</sub>, ..., अ<sub>न</sub>) ऐसा होगा।

यदि  $s = 0$ ,  $m = 0$ ,  $s_m = 0$  इत्यादि के मूलों के अन्तर का तद्रूपफल फल हो जिनमें से, 'से', 'से' इत्यादि स्थापन हों तो ऊपर की परिभाषा से प्रत्येक अव्यक्त मान इ इत्यादि के स्थानमें  $\frac{1}{2-y}$  इत्यादि के उत्थापन से और अभिन्न के लिये  $s_p$  से  $s_m$  से

इत्यादि से गुण देने से यदि गुणन फल में य रहे तो स<sub>१</sub> स<sub>२</sub> स<sub>३</sub> इत्यादि परम्परा का चलस्पर्शी और य न रहे तो उन्हीं परम्परा का वह गुणन फल अचलस्पर्शी होगा । ( सोपान के लिये १६९ वाँ प्रक्रम देखो )  
२२१ । कल्पना करो कि

अ<sup>०</sup> सो फा (१, २, ३, ..., इन) = फि अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, अ<sub>३</sub>, ... अन  
इनमें अव्यक्त मानों १, २ इत्यादि के स्थानों में उनके हरात्मक  
मान के उत्थापन से और अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ... इत्यादि के स्थानों में

$\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}$  इत्यादि के उत्थापन से  $\alpha_0$  से  $\text{फि}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$   
 $= \text{फी}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_0)$  जहाँ अत्यन्त मानों का  
 कोई तद्रूप फल फि है और फी तत्संबन्धी समीकरण के गुणकों  
 के रूप में मान है।

अब फिर  $\delta_1, \delta_2, \dots$  इत्यादि के स्थान में  $\delta_1 - y, \delta_2 - y,$   
 $\dots, \delta_n - y$  इत्यादि के उत्थापन से और  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots$  इत्यादि  
 के स्थानों में १२६ वें प्रक्रम से  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots$  इत्यादि के उत्थापन  
 से  $\alpha_n$  का चलस्पर्शी

$\alpha_0$  से  $\text{फि}(\delta_1 - y, \delta_2 - y, \dots, \delta_n - y) = \text{फि}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots,$   
 $\alpha_1, \alpha_0)$  ऐसा होगा। जैसे

$$1. \quad \alpha_4 = \alpha_0 y^4 + 2\alpha_1 y^3 + 3\alpha_2 y^2 + 4\alpha_3 y + \alpha_4 = 0$$

इसमें यदि  $y$  के मान  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  मान लो तो इनके  
 अन्तर का फल

$$\text{फा} = \alpha_0^2 \{ (\delta_1 - \delta_2)^2 + (\delta_1 - \delta_3)^2 + (\delta_2 - \delta_3)^2 \}$$

ऐसा हो तो १७१ वें प्रक्रम से

$$\text{फा} = 1 = (\alpha_1^2 - \alpha_0 \alpha_3)।$$

इसलिये मानों को उनके हरात्मक मानों में बदल देने से  
 और  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  इत्यादि के स्थानों में  $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots$  के रखने से

$$\alpha_0^2 \left\{ \frac{\delta_1^2 (\delta_2 - \delta_3)^2}{\delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2} + \frac{\delta_2^2 (\delta_3 - \delta_1)^2}{\delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2} + \frac{\delta_3^2 (\delta_1 - \delta_2)^2}{\delta_1^2 \delta_2^2 \delta_3^2} \right\}$$

$$= \alpha_0^2 \{ \delta_2^2 (\delta_2 - \delta_1)^2 + \delta_3^2 (\delta_3 - \delta_1)^2 + \delta_1^2 (\delta_3 - \delta_2)^2 \}$$

$$= १८ (अ_१ - १ - अ_१ अ_१ - २) = १८ (अ_२ - अ_१ अ_३)$$

इसमें  $इ_१, इ_२, इ_३$  इनके स्थान में  $इ_१ - य, इ_२ - य, इ_३ - य$  इनके उत्थापन से

$$अ_० \{ (इ_३ - य)^२ (इ_२ - इ_१)^२ + (इ_२ - य)^२ (इ_३ - इ_१)^२ + (इ_१ - य)^२ (इ_३ - इ_२)^२ \} = १८ (स_२ - स_१ स_३)$$

इसके दूसरे पक्ष में  $स_२, स_१, स_३$  इनका उत्थापन  $१२६$  प्रक्रम से देने से और लाघव के लिये  $१८$  को निकाल देने से

$$स_२ - स_१ स_३ = (अ_० अ_२ - अ_१^२) य^२ + (अ_० अ_३ - अ_१ अ_२) य + (अ_१ अ_३ - अ_२^२) यह  $स_३$  का चलस्पष्टी हुआ।$$

२। इसी प्रकार चतुर्घात समीकरण में अर्थात्  $स_४ = ०$  इस में यदि  $य$  के मान  $इ_१, इ_२, इ_३, इ_४$  हों और इन के अन्तर का फल  $= फा = अ_० यौ (इ_२ - इ_३)^२ (इ_२ - इ_४)^२$  तो  $१७१$  वें प्रक्रम से

$फा = २४ (अ_४ अ_० - ४ अ_३ अ_१ + ३ अ_२^२) = २४ भा (१२२ प्र. देखो)।$  इसमें  $इ_१, इ_२, इ_३$  इत्यादि के स्थानों में उनके हरात्मक मानों का और  $अ_०, अ_१, \dots$  इत्यादि के स्थानों में उनके स्पष्टी  $अ_१, अ_१ - १, \dots$  इत्यादि का उत्थापन दें तो  $फा$  ज्यों का त्यों रहता है; इसलिये यहां  $फा = फि$ , पुनः  $फि$  में  $इ_१, इ_२, \dots$  इत्यादि के स्थानों में  $इ_१ - य, इ_२ - य, \dots$  इत्यादि के उत्थापन से भी अन्तर करने से  $इ_१, इ_२, \dots$  इत्यादि के अन्तर के रहने से और  $य$  के न रहने से  $स_४$  का अचलस्पष्टी  $अ_४ अ_० - ४ अ_३ अ_१ + ३ अ_२^२ = भा$  यह होगा।

३। इसी प्रकार यदि चतुर्घात समीकरण  $स_४ = ०$  इसमें

$$\begin{aligned}
 \text{फा} &= \text{अ}_1 \{ (इ_3 - इ_1) (इ_2 - इ_4) - (इ_1 - इ_2) (इ_3 - इ_4) \\
 &\quad \{ (इ_1 - इ_2) (इ_3 - इ_4) - (इ_2 - इ_3) (इ_1 - इ_4) \} \\
 &\quad \{ (इ_2 - इ_3) (इ_1 - इ_4) - (इ_3 - इ_1) (इ_2 - इ_4) \} \\
 &= -४३२ \text{अ}_1 \text{अ}_2 \text{अ}_3 + २ \text{अ}_1 \text{अ}_2 \text{अ}_4 - \text{अ}_0 \text{अ}_2 - \text{अ}_1 \text{अ}_3 - \text{अ}_1^2 \\
 &= छ (१२२ वां प्र. देखो) \\
 &\text{तो यही स}_4 \text{ का अवलम्ब है।}
 \end{aligned}$$

२२२। चलस्पद्धी वा अवलम्ब में अव्यक्त मानों के ध्रुव शक्तिक फल फा होता है और उनके अन्तर का भी यही फल होता है। इसलिये चलस्पद्धी का रूप

$$\frac{\text{स}}{\text{य ध्रु}} \text{फा} \left( \frac{\text{य}}{इ_1 - \text{य}}, \frac{\text{य}}{इ_2 - \text{य}}, \dots, \frac{\text{य}}{इ_n - \text{य}} \right) \text{पेसा हो सकता है जहाँ}$$

सो सोपान और ध्रु ध्रुवशक्ति का द्योतक है।

अव्यक्त के मानों के अन्तर का फल फा होने से प्रत्येक ध्रुव  $\frac{\text{य}}{इ_1 - \text{य}}$  इत्यादि में एक जोड़ने से भी फा में भेद न होगा; इसलिये १ जोड़ने से और प्रत्येक को य से गुण और भाग देने से चलस्पद्धी

$$\frac{\text{स}}{\text{य ध्रु}} \text{फा} \left( \frac{इ_1 \text{य}}{इ_1 - \text{य}}, \frac{इ_2 \text{य}}{इ_2 - \text{य}}, \dots, \frac{इ_n \text{य}}{इ_n - \text{य}} \right) \text{पेसा होगा।}$$

जिसका लघुतम रूप

$$(-1)^{\text{धु न सो} - 2\text{धु}} \text{स य फा} \left( \frac{1}{\frac{1}{\text{इ}_1} - \text{य}}, \frac{1}{\frac{1}{\text{इ}_2} - \text{य}}, \dots \right)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\text{इ}_n} - \text{य}} \text{) ऐसा होगा जहाँ}$$

$$\text{स य} = \text{अ न} \left( \frac{1}{\text{य} - \frac{1}{\text{इ}_1}} \right) \left( \frac{1}{\text{य} - \frac{1}{\text{इ}_2}} \right) \dots \left( \frac{1}{\text{य} - \frac{1}{\text{इ}_n}} \right)$$

इस पर से सिद्ध होता है कि

$$\text{चलस्पद्ध} \frac{\text{स}}{\text{धु}} \text{फा} \left( \frac{\text{य}}{\text{इ}_1 - \text{य}}, \frac{\text{य}}{\text{इ}_2 - \text{य}}, \frac{\text{य}}{\text{य}_1 - \text{य}}, \dots, \frac{\text{य}}{\text{इ}_n - \text{य}} \right)$$

$$= \text{स} \text{फा} \left( \frac{1}{\text{इ}_1 - \text{य}}, \frac{1}{\text{इ}_2 - \text{य}}, \dots, \frac{\text{य}}{\text{इ}_n - \text{य}} \right)$$

यह अविकृत रहता है यदि  $\text{इ}_1, \text{इ}_2, \dots, \text{इ}_n, \text{य}$  इनके स्थान में इनके हरात्मक मानों का उत्थापन दें और  $\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \dots, \text{अ}_n$  इनके स्थान में  $\text{अ}_n, \text{अ}_{n-1}, \text{अ}_{n-2}, \dots, \text{अ}_0$  का उत्थापन धु न सो—२ धु

दे और उत्पन्न फल को  $(-1)^{\text{य}}$  इससे गुण दें।

इसलिये यदि  $\text{म}$  घात के किसी चलस्पद्धी का पद



$$(का_0, का_1, का_2, \dots, का_m) य, 1)^m \dots \dots \dots (1)$$

ऐसा हो तो  $अ_0, अ_1, अ_2, \dots, अ_n$ , य के स्थान में  $अ_n$ ,  
 $n-1, \dots, अ_0$ ,  $य$  के उत्थापन से वही

$$(-1)^{य} से - 2 ध्रु (खा_0, खा_1, \dots, खा_m) (य, 1)^m \dots \dots (2)$$

इस रूप का होगा। इसे (१) के साथ तुलना करने से

$$म=न से - 2 ध्रु, का_0 = (-1)^{ध्रु} खा_m, \dots, का_n = (-1)^{ध्रु} खा_{म-न} \dots \dots \dots (3)$$

(२) को (१) का संबद्ध कहते हैं और (१) को (२) का संबद्ध कहते हैं।

(३) से सिद्ध होता है कि यदि (१) के किसी पद का गुणक

फी ( $अ_0, अ_1, अ_2, \dots, अ_n$ ) =  $का_t$  हो तो इसके संबद्ध रूप

$$खा_{म-त} = फी (अ_n, अ_{न-1}, \dots, अ_0) (-1)^{ध्रु} यह होगा$$

(१) यदि  $अ_0$  से फी यह अचलस्पर्द्धी हो तो इसका संबद्ध भी अचलस्पर्द्धी होगा; इसलिये  $म=०=न$  से - 2 ध्रु  $\therefore$  न से - 2 ध्रु

(२) विषमघात समीकरण के अचलस्पर्द्धी में सम सोपान रहेगा। क्योंकि (१) से यहां पर न से - 2 ध्रु ऐसा होगा। परन्तु न विषम है, इसलिये से अचल सम होगा। और ध्रु न का अपचर्य होगा।

(३) समघात समीकरण का चलस्पद्धि भी समघात का होगा। क्योंकि न के सम होने से चलस्पद्धि का घात

$m=n$  से— $2\mu$  यह भी सम ही होगा।

(४) दो चलस्पद्धियों का प्रत्युत्पन्न भी सम ही घात का मुख्य समीकरण के पद गुणकों के रूप में होगा। क्योंकि प्रत्युत्पन्न के घात की संख्या यदि दोनों चलस्पद्धियों में सोपान और ध्रुवशक्ति को क्रम से  $स$ ,  $स'$ ,  $\mu$ ,  $\mu'$  मानो तो

$स (नसो' - 2\mu') + स' (नसो - 2\mu) = 2(नसोसो' - सो\mu' - सो'\mu)$   
यही होगी जो सम है।

### उदाहरण।

१। दिखलाओ कि दो समीकरणों का प्रत्युत्पन्न उन दोनों का अचलस्पद्धि है। (२१६ प्र० देखो)

२। यदि  $स \equiv अय^3 + ३अय^2 + ३खय + ग = 0$  इसमें अव्यक्त मान  $अ_१, अ_२, अ_३$  हों और  $स' \equiv अ'य^2 + २क'य + ख' = 0$  इसमें अव्यक्तमान  $अ'_१, अ'_२$  हों तो

$$\begin{aligned} & (अ_२ - अ_३)^2 अ_१ - अ'_१) (अ_१ - अ'_२) + (अ_३ - अ_१)^2 \\ & (अ_२ - अ'_१) (अ_२ - अ'_२) + (अ_१ - अ_२)^2 (अ_३ - अ'_१) \end{aligned}$$

$(अ_३ - अ'_२) = फ$  इसका मान समीकरण के पद गुणकों के फल में ले आओ।

यहां १६८ वें प्रक्रम से

$$-अ^२अ'फ = ६\{अ'(कग - ख^२) - क'(अग - कख) + ख'(अख - क^२)\}$$

२२० वें प्रक्रम की अन्तिम युक्ति से दोनों समीकरणों का यही चलस्पर्द्धी होगा ।

२२३ ।  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n) (य, १)^n = ०$  इसमें अव्यक्त मान  $इ_१, इ_२, \dots, इ_n$  हों तो

अ. फा  $(इ_१, इ_२, \dots, इ_n) =$  फी  $(अ_०, अ_१, \dots, अ_n)$   
 इसमें  $इ_१, इ_२, \dots, इ_n$  के स्थान में  $इ_१ - य, इ_२ - य, \dots, इ_n - य$  इत्यादि के उत्थापन देने से १२६ वें प्रक्रम से

अ. फा  $(इ_१ - य, इ_२ - य, \dots, इ_n - य)$   
 $=$  फी  $(स_०, स_१, स_२, \dots, स_n)$

चलनकलन के ६८ वें प्रक्रम से और फी में  $य^२$  इत्यादि के छोड़ देने से

$$स_० = अ_०, स_१ = अ_१ + अ_० य, स_२ = अ_२ + २अ_१ य, \dots$$

$$स_n = अ_n + नअ_{n-१} य \text{ ऐसा मानने से } \frac{ता फा}{ता इ_१} + \frac{ता फा}{ता इ_२} + \frac{ता फा}{ता इ_३} +$$

$$\dots + \frac{ता फा}{ता इ_n} = \left( \frac{ता}{ता इ_१} + \frac{ता}{ता इ_२} + \dots + \frac{ता}{ता इ_n} \right) फा$$

इस समुक्त से प्रकाश करने से और  $\frac{ता}{ता इ_१} + \frac{ता}{ता इ_२} + \dots$

$+ \frac{ता}{ता इ_n} =$ —वि मान लेने से और

$$अ_० \frac{ता फी}{ता अ_१} + २ अ_१ \frac{ता फी}{ता अ_२} + ३ अ_२ \frac{ता फी}{ता अ_३} + \dots +$$

$$न अ_{n-१} \frac{ता फी}{ता अ_n}$$

$$= \left( \text{अ}_0 \cdot \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_1} + 2 \text{अ}_1 \cdot \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_2} + \dots + \right. \\ \left. n \text{अ}_{n-1} \cdot \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_n} \right) \text{फी और}$$

$$\text{अ}_0 \cdot \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_1} + 2 \text{अ}_1 \cdot \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_2} + \dots + \\ n \text{अ}_{n-1} \cdot \frac{\text{ता}}{\text{ता अ}_n} = \text{वी}$$

पेसा हो तो यदि  $\text{फा.} = \text{फा} (इ_1, इ_2, इ_3, \dots, इ_n)$

और  $\text{फी.} = \text{फी} (\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \dots, \text{अ}_n)$

$$\text{तो } \text{अ}_0 \cdot \left( \text{फा.} + y \text{ वि फा.} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \text{वि}^2 \text{फा.} + \dots \right)$$

$= \text{फी.} + y \text{ वी फी.} + \dots$  दोनों समीकरणों में  $y$  के गुणक मान करने से

$$\text{अ}_0 \cdot \text{वि फा} (इ_1, इ_2, \dots, इ_n) = \\ \text{वी फी} (\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \dots, \text{अ}_n)$$

यह समीकरण दिखलाता है कि  $\text{फा}$  के वि से अव्यक्त मानों के रूप में जो तद्रूप फल होगा वही  $\text{फी}$  के वी से समीकरण के पदगुणकों के रूप में आवेगा।

$\text{फा}$  और  $\text{फी}$  के स्थान में  $\text{वि फा}$  और  $\text{वी फी}$  के लेनेवे ऊपर ही की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि  $\text{वि}^2 \text{फा} = \text{वी}^2 \text{फी}$ , इत्यादि उत्पन्न होंगे।

यदि वि  $\text{फा} = 0$  तो वि  $^2\text{फा}$  इत्यादि भी शून्य होंगे; इसलिये ऐसी स्थिति में

$\text{फा}$  ( $\text{इ}_1 - \text{य}$ ,  $\text{इ}_2 - \text{य}$ , .....  $\text{इ}_n - \text{य}$ ) इसमें  $\text{य}$  का नाश हो जायगा, परन्तु  $\text{य}$  का न रहना तभी संभव है जब कि  $\text{फा}$  ( $\text{इ}_1$ ,  $\text{इ}_2$ ,  $\text{इ}_3$ , .....  $\text{इ}_n$ ) यह अव्यक्तमानों के अन्तर का फल हो। इस पर से सिद्ध होता है कि यदि अ.  $^1\text{फा} = \text{वी फी} = 0$

वा अ.  $^2\text{फा} = 0$  तो कहेंगे कि अव्यक्तमानों के उत्तर का फल यह  $\text{फा}$  है। जैसे

### उदाहरण

१। अव्यक्तमानों के अन्तर के उस फल का मान बताओ जिसमें सोपान और ध्रुव शक्ति दोनों तीन हैं।

मान लो कि वह फल  $= \text{फ} = \text{आ अ}_0\text{अ}_1 + \text{का अ}_1\text{अ}_2 + \text{खा अ}_2$  (१६६ प्र० देखो)।

तो वी  $\text{फ} = (३\text{आ} + \text{का}) \text{अ}_0\text{अ}_2 + (२\text{का} + ३\text{खा}) \text{अ}_1\text{अ}_0 = 0$

इसलिये  $३\text{आ} + \text{का} = 0$ ।  $२\text{का} + ३\text{खा} = 0$ ।

यदि मान लो कि  $\text{अ} = १$  तो  $\text{का} = -३$ ,  $\text{खा} = २$ । इनके उत्थापन से

$\text{फअ} = .^3\text{अ} - ३ \text{अ}_0\text{अ}_1\text{अ}_2 + २ \text{अ}_1^2$ ।

यदि  $\text{अ}_0\text{य}^3 + ३\text{अ}_1\text{य}^2 + ३\text{अ}_2\text{य} + \text{अ}_3 = 0$  ..... (१)

इस पर से ३८ वें प्रक्रम की युक्ति से एक ऐसा नया समी-

करण बनाओ जिसमें दूसरा एव न रहे तों वह समीकरण

$$r^2 + \frac{r}{a_2} (a_0 a_2 - a_1^2 r + \frac{r}{a_0} (a_0^2 a_3 - 2 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^2 r) \dots \dots \dots (2)$$

ऐसा होगा। इसमें यदि

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0 \text{ और } a_0^2 a_3 - 2 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^2 r = 0$$

तो ऊपर जो फ आया है वह गा के तुल्य ही है। ऊपर के घन समीकरण में यदि  $a_0 r = l$  तो  $r = \frac{l}{a_0}$ , इसके उत्थापन से

$$\frac{l}{a_0^3} + \frac{r}{a_0^2} \text{ हाल} + \frac{गा}{a_0} = 0 \text{ वा } l^3 + 4 \text{ हाल} + गा = 0 \dots (3)$$

हा और गा ये घन समीकरणों में बड़े उपयोगी हैं।

२२४। २.१ वें प्रक्रम से सन का चलस्पष्टी फी (सन, सन-१, ..... स<sub>०</sub>) यह है जिसे यदि फी कहें और जब य=० तब फी को फी<sub>०</sub>=फी (अ<sub>न</sub>, अ<sub>न-१</sub>, ..... अ<sub>०</sub>) कहें और ऊपर के प्रक्रम का सङ्केत वी ग्रहण करें जिसका नाम कारक कहो तो चलनकलन से और वी कारक से

$$\text{फी} = \text{फी}_० + \text{य वी फी}_० + \frac{\text{य}^2}{२!} \text{वी}^2 \text{फी}_० + \dots + \frac{\text{य}}{\text{वीत}} \text{फी}_० + \dots$$

यहां फी<sub>०</sub> का बार बार वी लेने से मान बदलता बदलता जब फी (अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, ..... अ<sub>न</sub>) ऐसा होगा तब यह अव्यक्त

के मानों का अन्तर होगा। २२३ वें प्रक्रम की युक्ति से फिर आगे इसका वी शून्यके तुल्य होगा और फी के श्रेढी रूप मान में आगे के सब पद उड़ जायेंगे। इसका मान फी (१, १, ... .. १) के वि कारक से जान सकते हैं। जैसे

### उदाहरण

१। अ. य<sup>१</sup> + ३ अ. य<sup>२</sup> + ३ अ. य + अ. = ० इसमें यदि अ. अ. - अ. = डा और १२० वें प्रक्रम के उदाहरण को लेने से

$$\text{अ.} \text{ यौ} \text{ इ} \text{ ( इ } २ - \text{ इ } १ )^२ = १८ ( \text{ अ } २ - \text{ अ } १, \text{ अ } १ )$$

तो यहां फि. = अ. यौ इ ( इ २ - इ १ )<sup>२</sup> = फी.

$$= १८ ( \text{ अ } २ - \text{ अ } १, \text{ अ } १ ) = \text{फी.}$$

बायें पक्ष का वि और दहिने पक्ष का वी लेने से

$$- \text{अ.} \text{ यौ } २ \text{ इ } १ ( \text{ इ } २ - \text{ इ } १ )^२ = १८ ( \text{ अ } १, \text{ अ } २ - \text{ अ } १, \text{ अ } १ ) = \text{वी फी.}$$

फिर वैसी ही क्रिया करने से

$$( \text{ अ } २ \text{ यौ } १ ( \text{ इ } २ - \text{ इ } १ )^२ = ३६ ( \text{ अ } १ - \text{ अ } १, \text{ अ } २ ) = \text{वी}^२ \text{ फी.}$$

फिर वैसी ही क्रिया करने से दोनों पक्ष शून्य के तुल्य होंगे। इनका उत्थापन फी में देने से और - १८ का भाग दे देने से

$$( \text{ अ } १, \text{ अ } १ - \text{ अ } २ )^२ + ( \text{ अ } ०, \text{ अ } १ - \text{ अ } १, \text{ अ } २ ) \text{ य } + ( \text{ अ } ०, \text{ अ } २ - \text{ अ } १ )^२ \text{ य }^२$$

यह चलस्पर्द्धी का रूप हुआ जो कि १२० वें प्रक्रम के उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है। देखो ऊपर के चलस्पर्द्धी के य<sup>१</sup> का गुणक हा है और हा का वी शून्य होता है; इसलिये हा को

प्रधान गुणक कहते हैं। इसी प्रधान हा से फी (०, अ, ..... अ<sub>n</sub>) यह बना है। इसी में अ<sub>०</sub>, अ, ..... इत्यादि के स्थान में इनके स्पर्द्धी अ<sub>n</sub>, अ<sub>n-1</sub>, ... .. इत्यादि के उत्थापन से फी. बनता है। फिर फी में अ<sub>n</sub>, अ<sub>n-1</sub>, ..... इत्यादि के स्थान में स<sub>n</sub>, स<sub>n-1</sub>, ..... इत्यादि के उत्थापन से चलस्पद्धी का रूप होता है।

२। अ<sub>०</sub>य<sup>३</sup> + ५ अ<sub>१</sub>य<sup>३</sup> + ६अ<sub>२</sub>य<sup>३</sup> + ४अ<sub>३</sub>य + अ<sub>४</sub> = ० इस चतुर्घात समीकरण का वह चलस्पद्धी बनाओ जिसमें प्रधान गुणक हा हो।

हा = अ<sub>०</sub>अ<sub>२</sub> - अ<sub>२</sub><sup>२</sup>, और चलस्पद्धी चतुर्घात का समीकरण होगा। क्योंकि यहां सो = २ और धु = २; इसलिये २२२ वे प्रक्रम से म = न सो - २ धु = ४ × २ - २ × २ = ४।

अ<sub>०</sub>, अ<sub>२</sub>, अ, इनके स्थान में इनके स्पर्द्धी अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, अ, के उत्थापन से

$$\text{फी.} = \text{अ}_1 \text{अ}_2 - \text{अ}_2^2$$

$$\text{बी फी.} = २\text{अ}_0 \text{अ}_3 - ६\text{अ}_2 \text{अ}_1 + ४\text{अ}_3 \text{अ}_2 - २\text{अ}_1 \text{अ}_3 - \text{अ}_2^2 \text{अ}_1$$

$$\begin{aligned} \text{वी}^२ \text{फी.} &= २ (\text{अ}_0 \text{अ}_3 - २\text{अ}_1 \text{अ}_3 - ३\text{अ}_2^2 + ४\text{अ}_1 \text{अ}_2) \\ &= २ (\text{अ}_0 \text{अ}_3 + २\text{अ}_1 \text{अ}_3 - ३\text{अ}_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{वी}^३ \text{फी.} &= ४ (\text{अ}_0 \text{अ}_3 + २\text{अ}_1 \text{अ}_3 - १२\text{अ}_1 \text{अ}_2 + ६\text{अ}_1 \text{अ}_2) \\ &= ४ (३\text{अ}_0 \text{अ}_3 - ३\text{अ}_1 \text{अ}_2) = १२ (\text{अ}_0 \text{अ}_3 - \text{अ}_1 \text{अ}_2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{वी}^* \text{ फी}_0 &= 12(3 \text{ अ}_0 \text{ अ}_2 - 2 \text{ अ}_1^2 - \text{अ}_0 \text{ अ}_2) \\ &= 24 (\text{अ}_0 \text{ अ}_2 - \text{अ}_1^2) \end{aligned}$$

इनके उत्थापन से चलस्पष्टी

$$(\text{अ}_0 \text{ अ}_2 - \text{अ}_1^2) \text{ य}^2 + 2(\text{अ}_0 \text{ अ}_3 - \text{अ}_1 \text{ अ}_2) \text{ य} + (\text{अ}_0 \text{ अ}_4 + 2 \text{ अ}_1 \text{ अ}_3 - 3 \text{ अ}_2^2) \text{ य}^2$$

$$+ 2(\text{अ}_1 \text{ अ}_4 - \text{अ}_2 \text{ अ}_3) \text{ य} + (\text{अ}_2 \text{ अ}_4 - \text{अ}_3^2) = \text{हा}$$

२२५। कल्पना करो कि  $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \dots, \text{अ}_n)$   $(\text{य}, \text{र})^n$  के दो चलस्पष्टी

$$(\text{का}_1, \text{का}_2, \text{का}_3, \dots, \text{का}_p) (\text{य}, \text{र})^p \equiv \text{का}_0 (\text{य} - \text{का}_1 \text{ र}) (\text{य} - \text{का}_2 \text{ र}) \dots (\text{य} - \text{का}_p \text{ र})$$

और  $(\text{खा}_0, \text{खा}_1, \text{खा}_2, \dots, \text{खा}_p) (\text{य}, \text{र}) \equiv \text{खा}_0 (\text{य} - \text{खा}_1 \text{ र}) (\text{य} - \text{खा}_2 \text{ र}) \dots (\text{य} - \text{खा}_p \text{ र})$  हैं तो

$$\begin{aligned} \text{का}_0 \text{ का}_1 \text{ र} + \text{प का}_1 \text{ का}_2 \text{ य}^{p-1} \text{ र} + \frac{\text{प}(\text{प}-1)}{2!} \text{का}_2 \text{ का}_1 \text{ य}^{p-2} \text{ र}^2 + \\ \dots + \text{का}_p \text{ र}^p = 0 \end{aligned}$$

र का भाग दे देने से

$$\begin{aligned} \text{का}_0 \text{ कत} + \text{प का}_1 \text{ कत}^{p-1} + \frac{\text{प}(\text{प}-1)}{2!} \text{का}_2 \text{ कत}^{p-2} + \dots \\ + \text{का}_p = 0 \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

२२३ वें प्रक्रम को युक्ति से  $\text{का}_0, \text{का}_1, \dots, \text{का}_p$  को मुख्य समीकरण  $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \dots, \text{अ}_n) (\text{य}, \text{र})$  के अध्यक्त मानों के फल

होने से  $\text{विका}_0 = 0$ ,  $\text{पविका}_1 = \text{पका}_0, \frac{p(p-1)}{2!} \text{वि का}_2 = \text{पका}_1(p-1)$

सलिये

$$\text{वि} \left\{ \text{का}_0 \text{कत} + \text{पका}_1 \text{कत}^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2!} \text{का}_2 \text{कत}^{p-2} + \dots + \text{का}_p \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \text{प का}_0 \text{कत}^{p-1} \text{विकत} + \text{प का}_1 \text{कत}^{p-1} + \\ &\text{प}(p-1) \text{का}_2 \text{कत}^{p-2} \text{विकत} + \text{प}(p-1) \text{का}_3 \text{कत}^{p-2} + \dots \\ &= \text{प का}_0 \text{कत}^{p-1} (1 + \text{विकत}) + \{ \text{प}(p-1) \text{का}_2 \text{कत}^{p-2} \} \\ &\quad (1 + \text{विकत}) + \dots \end{aligned}$$

$$\text{प} \left\{ \text{का}_0 \text{कत}^{p-1} + (p-1) \text{का}_2 \text{कत}^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{2!} \right.$$

$$\times \text{का}_3 \text{कत}^{p-3} + \dots + \text{का}_p \left. \right\} (1 + \text{विकत}) = 0$$

$$\text{इसलिये विकत} + 1 = 0 \quad \therefore \text{विकत} = -1$$

$$\text{इसी प्रकार विखथ} + 1 = 0 \quad \therefore \text{विखथ} = -1$$

$$\therefore \text{वि}(\text{कत} - \text{खथ}) = 0$$

परन्तु  $\text{कत} - \text{खथ}$  का वि तभी शून्य होगा जब  $\text{कत} - \text{खथ}$  यह मुख्य समीकरण के मानों के अन्तर का फल होगा।

इस पर से सिद्ध होता है कि

दो चलस्पष्टियों आकृत्य मानों के अन्तर का फल

मुख्य समीकरण के अव्यक्त मानों के अन्तरों का फल होगा ।

२२६। वर्णान्तर के उत्थापन से  $s_n$  का मान जो  $s'_n$  होता है उसका अवलम्बस्पर्द्धी  $s_n$  के अवलम्बस्पर्द्धी को  $\begin{vmatrix} d & t \\ d' & t' \end{vmatrix}$  इस कनिष्ठफल के ध्रु घात से गुण देने से होता है ।

कल्पना करो कि  $s_n$  के  $y = \frac{d'y' + t}{d'y' + t}$  ऐसा मान कर समीकरण का रूपान्तर किया और  $s_n$  का अवलम्बस्पर्द्धी

$$A = a. \text{ से } y_1 (d_1 - d_2) y_2 (d_2 - d_3) \dots (d_{n-1} - d_n)^2$$

जहां प्रत्येक अव्यक्त मान के से तुल्य परमघात आए हैं ।  
तो रूपान्तर किए हुए समीकरण को  $s'_n$  कहो तो इसमें किसी दो अव्यक्त  $d'y$  और  $d'y$  के मान ऊपर के  $y$  मान से जो

$$y' = \frac{t'y - t}{d - d'y} \text{ यह सिद्ध होता है उसमें उत्थापन देने से}$$

$$d'y = \frac{t'dy - t}{d - d'dy}, \quad d'y = \frac{t'dy - t}{d - d'dy}$$

$$\therefore d'y - d'y = \frac{(dt' - d't)(dy - dy)}{(d - d'dy)(d - d'dy)}$$

और  $s'_n = a' \cdot (y' - d'_1) (y' - d'_2) \dots (y' - d'_n)$   
(यदि अभिन्न में रूप बनाओ तो)

$$\text{जहां } a' = a \cdot (d - d'd_1) (d - d'd_2) \dots (d - d'd_n)$$

अब यदि  $इ'य - इ'ध$  इसमें  $ध$  और  $घ$  के स्थान में १, २, २, ३ इत्यादि के उत्थापन से  $स'न$  का अचलस्पर्द्धी  $आ'$  बनाओ और  $अ.$  के स्थान में  $अ'$  का उत्थापन दो तो हर के उड़ जाने से

$$आ' = (द'त' - द'त) धु आ ..... (१)$$

ऐसा होगा ।

इसी प्रकार यदि  $स$  का चलस्पर्द्धी

$$फी (य) = अ. सो यौ (इ_१ - इ_२) अ (इ_२ - इ_३) क ..... \\ (य - इ_१)^प (य - इ_२)^ब$$

जो कि  $फी (य)$  के आधार अव्यक्त मानों के फल  $फी$  में  $इ_१, इ_२, ... इ_न$  इत्यादि के स्थान में— $य + इ_१, - य + इ_२, ... - य + इ_न$  के उत्थापन से उत्पन्न हुआ है । (२२१ वाँ प्र० देखो)

तो  $स'$  का चलस्पर्द्धी  $= (द'त' - द'त) धु फी (य)$  होगा । क्योंकि ऊपर की युक्ति से जब  $फी (य)$  के आधार फल  $फि$  में  $इ'_१, इ'_२, ...$  इत्यादि का उत्थापन दोगे तो हर में

$(द - द'इ_१) (द - द'इ_२) ..... (द - द'इ_न)$  इसका सो घात रहेगा जो  $अ.$  सो इस गुणक के कारण नाश हो जायगा । केवल गुणक  $अ.$  यह रह जायगा और  $(द'त' - द'त)$  का  $धु$  घात गुणक होगा । २२४ वे प्रकरण में  $फी.$  के बी से जो चलस्पर्द्धी आया है उस से भी यही सिद्ध होता है ।

२२७। यदि

$$s_n = a_0 y^n + n a_1 y^{n-1} r + \frac{n(n-1)}{2!} a_2 y^{n-2} r^2 + \dots + a_n r^n$$

ऐसा ध्रुवशक्ति फल हो तो

$$\frac{d' y' + t}{d' y' + t' r} = y \text{ इसके स्थान में } s_n \text{ को अभिव्यक्त करने के लिये}$$

$$\frac{y}{r} = \frac{d' y' + t' r'}{d' y' + t' r} = \frac{d' y' - t}{d' y' + t' r} \text{ ऐसा मानना चाहिए}$$

जहाँ  $y = d' y' + t' r'$  और  $r = d' y' + t' r'$  और

$$s_n = r^n (a_0 t^n + n a_1 t^{n-1} r + \dots + a_n r^n)$$

$$= (d' y' + t' r')^n \left\{ \frac{a_0 (d' y' + t' r')^n}{(d' y' + t' r')^n} + \frac{n a_1 (d' y' + t' r')^{n-1}}{(d' y' + t' r')^{n-1}} \right.$$

$$\left. + a_0 (d' y' + t' r')^n + n a_1 (d' y' + t' r')^{n-1} (d' y' + t' r') + \dots \right.$$

इस पर से कह सकते हैं कि एक अव्यक्त के फलों को दो वर्णान्तरों के ध्रुवशक्ति फलों के रूप में बदल सकते हैं।

अर्थात् यदि  $s = a_0 y + n a_1 y^{n-1} r + \dots + a_n$  इसका अवलम्बित आ हो और  $y = \frac{d' y' + t' r'}{d' y' + t' r}$  ऐसा मान कर उत्थापन से  $s'$  का अवलम्बित आ' बनाओ तो

$आ' = (द'त' - द'त) \frac{ध्रु}{}$  आ इसमें  $t$  और  $t'$  के स्थान में  $t r$  और  $t' r$  के उत्थापन से

$\text{अ}' = (\text{द}' - \text{द}')^{\text{अ}'} \text{अ} \text{ऐसा होगा।}$

$$\text{स}' = \text{र}' (\text{अ}_0 \text{ल}' + \text{नअ}_1 \text{ल}'^{-1} + \dots + \text{अ}_n) = 0$$

तो  $\text{र}'$  के अपवर्त्तन से  $\text{अ}_0 \text{ल}' + \text{नअ}_1 \text{ल}'^{-1} + \dots + \text{अ}_n = 0$  इसमें  $\text{ल}'$  के वे ही मान होंगे जो  $\text{अ}_0 \text{य}' + \text{नअ}_1 \text{य}'^{-1} + \dots + \text{अ}_n = 0$  इसमें होंगे ; इसलिये

$(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \dots, \text{अ}_n) (\text{य}, 1)^n$  इसका जो अवलम्ब है होगा वही  $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \dots, \text{अ}_n) (\text{ल}, 1)^n$  इसका अवलम्ब होगा।

$(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \dots, \text{अ}_n) (\text{य}, 1)^n$  इसके  $\text{इ}_1, \text{इ}_2, \text{इ}_3, \dots, \text{इ}_n$  के मानों के र गुणित तुल्य मान  $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \dots, \text{अ}_n) (\text{य}, 1)^n$  इसके होंगे। इसलिये इसका अवलम्ब पहिले अवलम्ब के  $\text{र}'$  इससे गुण देने से होगा।

$$\text{अ}_0 \text{ल}' + \text{नअ}_1 \text{ल}'^{-1} + \dots + \text{अ}_n = 0 \text{ इसमें } \text{ल}' = \frac{\text{य}}{\text{र}} \text{ के}$$

स्थान में  $\frac{\text{द}' \text{य}' + \text{त}' \text{र}'}{\text{द}' \text{य}' + \text{त}' \text{र}'}$  अर्थात्  $\text{य}'$  के स्थान में  $\text{द}' \text{य}' + \text{त}' \text{र}'$  का

और  $\text{र}'$  के स्थान में  $\text{द}' \text{य}' + \text{त}' \text{र}'$  का उत्थापन देने से इस नये समीकरण का अवलम्ब  $=(\text{द}' - \text{द}')^{\text{अ}'} \text{अ}$  जहाँ  $\text{अ}_0 \text{ल}' + \text{नअ}_1 \text{ल}'^{-1} + \dots + \text{अ}_n$  का अवलम्ब  $\text{अ}$  है। इससे नीचे लिखी बातें सिद्ध होती हैं :—

(१) किसी बहुपद अव्यकराशि का अवलम्ब पदों के गुणकों का ऐसा फल है कि यदि अव्यक्त राशियों को व्यक्ताङ्क गुणित युत वर्णान्तरों से उत्थापन दें तो नये समीकरण के पद गुणकों का वैसा ही फल, पहिले फल को  $\text{द}' - \text{द}'$  इसके

एक कोई घात भु से गुण देने से जो गुणनफल होगा उसके तुल्य होगा।

(२) चलस्पद्धीं बहुपद अव्यक्तराशि के पदों के गुणकों का और अव्यक्तों का एक ऐसा फल है कि यदि अव्यक्त राशिओं के स्थान में व्यक्ताङ्कगुणित युत वर्णान्तरों से उत्थापन दे' तो इसमें उसी फल के ऐसा पद गुणकों का और नये अव्यक्त राशिओं का जो फल हो वह पूर्वफल को दत्' - द'त के भु घात से गुण देने से जो हो उसके तुल्य होगा।

दत्' - द'त इसे समीकरणों के परिपत्ति का मध्यस्थ कहते हैं।

### उदाहरण

१। यदि  $y = दया + तरा$ ,  $r = द'या + त'रा$  और  $अय^२ + २कय + खर^२ = आया^२ + २कायारा + खारा^२$  तो पहिले का अव्यक्तस्पद्धीं अख - क<sup>२</sup> यह होगा, क्योंकि २२२वें प्रक्रम के पहिले उदाहरण में यही हा है और हा का बी शून्य होता है। इसलिये ऊपर (१) नियम से भुवशक्ति दो होने से  $आखा - का^२ = (दत, - द, त)^२ (अख - क^२)$  ऐसा होगा।

$$२। (अ, क, ख, ग, घ) (य, र)^४ = (अ, का, खा, गा, घा) (या, रा)^४$$

जहां  $y = दया + तरा$ ,  $r = द'या + त'रा$ ।

यहां २१० प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से पहिले का अव्यक्तस्पद्धीं अघ - ४कग + ३ख<sup>२</sup> यह है और भु = ४ और मध्यस्थ = (दत, - द, त),

$$\text{इसलिये } आघा - ४कगा + ३खा^२ = (दत, - द, त)^४ \times (अघ - ४कग + ३ख^२)$$

३। दूसरे उदाहरण में २२० प्रक्रम के तीसरे उदाहरण से  $अखघ + २कखग - अग^२ - क^२घ - ख^३$  यह भी पहिले का अवलम्बणी है जहां  $धु = ६$ ; इसलिये

$$आखाघा + २काखागा - आगा^२ - का^२घा - खा^३ \\ = (दत, - द, त)^३ (अखघ + २कखग - अग^२ - क^२घ - ख^३)$$

४। ऊपर ही के रूपान्तर से यदि

$$अय^२ + २कयर + खर^२ = आया^२ + २कायारा + खारा^२ \dots \dots (१)$$

$$अ, य^२ + २क, यर + ख, र^२ = आ, या^२ + २का, यारा + खा, रा^२ \dots \dots (२)$$

तो (१) में इ गुणित (२) को जोड़ देने से

$$(अ + इअ, )य^२ + २(क + इक, यर + (ख + इख, )र^२ \\ = (आ + इआ, )या^२ + २(का + इका, )यारा + (खा + इखा, )रा^२$$

(१) उदाहरण से

$$\{दत, - द, त\}^२ \{(अ + इअ, )(ख + इख, ) - (क + इक, )^२\} \\ = (आ + इआ, )(खा + इखा, ) - (का + इका, )^२$$

दोनों पक्षों में इ के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$$आखा, + आ, खा - २काका, = (दत, - द, त)^२ \\ \times (अख, + अ, ख - २कक, )$$

और  $आ, खा, - का, = (दत, - द, त)^२ (अ, ख, - क, )$  जो कि प्रथम उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है।

५।  $अय^२ + कर^२ + खल^२ + २फल + २गयल + २हपर$  इस ध्रुव शक्ति समीकरण में  $य = द, या + त, रा + प, बा, र = द, रा +$



त<sub>२</sub>रा + थ<sub>२</sub>ला और ल = द<sub>२</sub>या + त<sub>२</sub>रा + थ<sub>२</sub>ला ऐसे मानों से समीकरण को बदलने से यदि समीकरण का रूपान्तर आया<sup>२</sup> + कारा<sup>२</sup> + खाला<sup>२</sup> + रफाराला + रगापाला + रहायारा ऐसा हो तो सिद्ध करो कि

द <sub>१</sub>	द <sub>२</sub>	द <sub>३</sub>	२	अ	ह	ग	=	आ	हा	गा
त <sub>१</sub>	त <sub>२</sub>	त <sub>३</sub>		ह	क	फ		हा	का	फा
थ <sub>१</sub>	थ <sub>२</sub>	थ <sub>३</sub>		ग	फ	ख		गा	फा	खा

पहिले समीकरण में अव्यक्त के नये मानों का उत्थापन देकर गुणकों का परस्पर सम्बन्ध जान कर ऊपर के कनिष्ठ-फलों की समता सहज में जान सकते हो। इससे यह भी जान पड़ता है कि दिए हुए तीन अव्यक्त सम्बन्धी समीकरणों का

अ	ह	ग
ह	क	फ
ग	फ	ख

यह अचलस्पष्टी है।

२२८—यदि  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n)$   $(य, र)^n = स_n$  इसमें  $य = या + चरा$ ,  $य = ०या + रा$  तो स<sub>n</sub> का रूपान्तर  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n)$   $(या, रा)^n$  ऐसा होगा जहां १२६वें प्रक्रम से आ<sub>०</sub> = अ<sub>०</sub>, आ<sub>१</sub> = अ<sub>१</sub> + अ<sub>०</sub>च, आ<sub>२</sub> = अ<sub>२</sub> + २अ<sub>१</sub>च + अ<sub>०</sub>च<sup>२</sup>; इत्यादि।

अब यदि स<sub>n</sub> का चलस्पष्टी फी  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n, य, र)$  यह हो तो १२६वें प्रक्रम के (२) नियम से मध्यस्थ बत' - द'त के १ के तुल्य होने से

$$\begin{aligned} & \text{फी } (अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n, य, र) \\ &= \text{फी } (अ_०, आ_१, आ_२, \dots, आ_n, या, रा) \\ &= \text{फी } (अ_०, आ_१, आ_२, \dots, आ_n, य - चर, र) \end{aligned}$$

दहिने पक्ष का रूप चलनकलन के ६८वें प्रक्रम से च के घात वृद्धि में ले आने से

$$फी = फी + च(वीफी - र \frac{ताफी}{ताय} + हा_२ च^२ + हा_३ च^३ + \dots)$$

जहां हा<sub>२</sub>, हा<sub>३</sub>, इत्यादि च<sup>२</sup>, च<sup>३</sup> इत्यादि के गुणक हैं।

च के किसी मान में यह समीकरण ठीक होगा। इसलिये फी को दोनों पक्षों में घटाकर च का भाग देकर लब्धि में च को शून्य मानने से वीफी - र  $\frac{ताफी}{ताय} = ०$

$$\therefore र \frac{ताफी}{ताय} = वीफी = अ_० \frac{ताफी}{ताअ_१} + १ अ_१ \frac{ताफी}{ताअ_२} + ३ अ_२ \frac{ताफी}{ताअ_३} + \dots + नअ_n \frac{ताफी}{ताअ_n} \dots (१)$$

यदि फी को (का<sub>०</sub>, का<sub>१</sub>, का<sub>२</sub>, का<sub>३</sub>, ..... का<sub>म</sub>) (य, र)<sup>म</sup> ऐसा कल्पना करें तो

$$\begin{aligned} र \frac{ताफी}{ताय} &= मका_० य^{म-१} र + म (म-१) का_१ य^{म-२} र^२ + \dots \\ &+ मका_{म-१} र^म \\ &= वीफी = वीका_० य^म + मवीका_१ य^{म-१} र + \dots + वीका_m र^म \end{aligned}$$

य के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$$वीका_० = ०, वीका_१ = का_०, वीका_२ = २का_१, \dots, वीका_m = मका_{म-१}$$

यही बात २२४वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुई है।

यदि ऊपर के  $s_n$  के मान में  $y = 0y + 1r = y + 0r$  ऐसा मानें तो यहां मध्यस्थ - १ होगा और  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$   $(y, r)^n = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) (y, r)_n$  और तब  $s_n$  का चलस्पद्धि

$$\begin{aligned} (-1)^n \text{फी} (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, y, r) \\ = \text{फी} (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, y, r) \\ = (-1)^n \text{फी} (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, r, y) \end{aligned}$$

इस पर से सिद्ध होता है कि

चलस्पद्धि के आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पदों के गुणक, संख्या में समान होंगे (यदि ध्रु विषम होगा तो विरुद्ध चिन्ह के होंगे)।

यदि किसी एक मान में  $a_0, a_1$  इत्यादि के स्थान में उनके स्पद्धि  $a_n, a_{n-1}$  इत्यादि रख दिए जायं।  $r$  के स्थान में  $y$  और  $y$  के स्थान में  $r$  को रख देने से और  $a_0, a_1, \dots$  इत्यादि के स्थान में  $a_n, a_{n-1}$  इत्यादि के ग्रहण करने से (१) समीकरण से

$$\begin{aligned} y \frac{\text{ताफी}}{\text{ता } r} = a_n \frac{\text{ताफी}}{\text{ता } a_{n-1}} + a_{n-1} \frac{\text{ताफी}}{\text{ता } a_{n-2}} + a_{n-2} \frac{\text{ताफी}}{\text{ता } a_{n-3}} \\ + \dots + a_1 \frac{\text{ताफी}}{\text{ता } a_0} \end{aligned}$$

यदि  $s_n$  का फी  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  यह अचलस्पद्धि हो तो ऊपर जो  $y$  और  $r$  के परिवर्तन से नया  $s_n = s'_n$  ऐसा बनेगा, उसको अचलस्पद्धि, मध्यस्थ का मान एक होने से

२२५ प्रक्रम के (१) समीकरण से  $s'_n$  और  $s_n$  के अचल-  
स्पष्टिओं में

फी  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \text{फी} (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$   
ऐसा समीकरण बनेगा ।

और ऊपर के (१) समीकरण से अब

$$\alpha_0 \frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_1} + 2\alpha_1 \frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_2} + 3\alpha_2 \frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_3} + \dots + n\alpha_{n-1} \frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_n} = 0$$

$$\alpha_n \frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_{n-1}} + 2\alpha_{n-1} \frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_{n-2}} + 3\alpha_{n-2} \frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_{n-3}} + \dots + n\alpha_1 \frac{\text{ताफी}}{\text{ताअ}_0} = 0$$

और  $s_n$  में यदि  $y=1$ ,  $r=y$  तो मध्यस्थ का मान  $-1$   
होगा; इसलिये तब दोनों के अचलस्पष्टिओं में

$$\text{फी}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0) = (-1)^n \text{फी}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

इससे सिद्ध होता है कि

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  इत्यादि के स्थान में यदि  $\alpha_n$ ,  
 $\alpha_{n-1}$ ,  $\alpha_{n-2}$  इत्यादि का उत्थापन दें तब जो  $s'_n$  होगा  
उसका अचलस्पष्टि  $s_n$  के अचलस्पष्टि के समान ही  
होता है । जब ध्रु विषम होता है तब केवल दोनों, संख्या  
में तुल्य, विरुद्ध चिन्ह के होंगे ।

२२९—इस प्रक्रम में चलस्पद्धी और अचलस्पद्धियों के विषय में जो कुछ लिख आए हैं उनकी व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण क्रिया समत दिखलाते हैं।

### उदाहरण

१।  $s_2 = a_0 y^2 + 2a_1 y + a_2 = 0$  इसमें अव्यक्त मान  $i_1, i_2$  हों तो सिद्ध करो कि किसी वर्ग समीकरण में एक ही प्रधान अचलस्पद्धी होता है और चलस्पद्धी उस वर्ग समीकरण को छेड़ कर और कोई नहीं होता।

$$\text{यहां } s_2 = a_0(y - i_1)(y - i_2)$$

$$\text{और } i_1 - i_2 = 2\sqrt{\frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3}}$$

इसलिये यहां अचलस्पद्धी वा चलस्पद्धी  $(i_1 - i_2)^{2p}$  इस रूप से होगा क्योंकि अव्यक्त के मानान्तर का विषम घात समीकरण के पद गुणकों का अकरणीगत फल नहीं होता। इसलिये  $(i_1 - i_2)^{2p}$  इसमें  $i_1, i_2$  के स्थान में  $i_1 - y, i_2 - y$  के उत्थापन से और भिन्न को दूर करने के लिये  $s_2^p$  से गुण देने से स्पद्धी का रूप  $s_2^p \left( \frac{1}{i_1 - y} - \frac{1}{i_2 - y} \right)^{2p}$

$$= \frac{a_0^{2p}(i_2 - i_1)^{2p}}{(i_1 - y)^{2p}(i_2 - y)^{2p}} (i_1 - y)^{2p}(i_2 - y)^{2p}$$

$$= a_0^{2p}(i_2 - i_1)^{2p} = 2^{2p} a_0^{2p} (a_1^2 - a_2 a_0)^p$$

स्थिर गुणकों को हटा देने से अचलस्पद्धि  $\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2$  यह होगा।

इसके घात  $\gamma$  के तुल्य जो ऊपर अचलस्पद्धि है वह इसी से बना है। इसलिये प्रधान अचलस्पद्धि  $\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2$  यही होगा और यदि  $\text{फी}_0 = \alpha_1$  तो २२३वें प्रक्रम से  $\text{फी}_0 = \alpha_2$ ,  $\text{वीफी}_0 = 2\alpha_1$ ,  $\text{वी}^2\text{फी}_0 = 2\alpha_0$ । इसलिये  $s_2$  का चल-स्पद्धि  $\text{फी} = \text{फी}_0 + \gamma \text{वीफी}_0 + \frac{\gamma^2}{1 \cdot 2} \text{वी}^2\text{फी}_0 = \alpha_2 + 2\alpha_1\gamma + \alpha_0\gamma^2$ , यह  $s_2$  ही है।

२। घन समीकरण में चलस्पद्धिओं के रूपों को बताओ, जहाँ  $s_3 = \alpha_0\gamma^3 + 3\alpha_1\gamma^2 + 3\alpha_0\gamma + \alpha_3 = 0$  और अव्यक्त मान  $इ_1, इ_2, इ_3$  हैं।

यहाँ अव्यक्त के कोई दो मान  $इ_1$  और  $इ_2$  के अन्तर  $इ_1 - इ_2$  में  $\frac{1}{इ_1 - \gamma}, \frac{1}{इ_2 - \gamma}$  इनके उत्थापन से

$$\begin{aligned} \frac{1}{इ_1 - \gamma} - \frac{1}{इ_2 - \gamma} &= \frac{इ_2 - इ_1}{(\gamma - इ_1)(\gamma - इ_2)} \\ &= \frac{-(इ_2इ_3 + इ_1\gamma) + (इ_1इ_3 + इ_2\gamma)}{(\gamma - इ_1)(\gamma - इ_2)(\gamma - इ_3)} \end{aligned}$$

भिन्न को हटाने के लिये  $s_3$  से गुण देने से

$\alpha_0 \{ -(इ_2इ_3 + इ_1\gamma) + (इ_1इ_3 + इ_2\gamma) \}$  ऐसा होगा।  
यहाँ बृहत्कोष्ठकान्तर्गत जो राशि है वह देखो  $इ_1 - इ_2$  इसमें

—इ<sub>१</sub>, और इ<sub>२</sub> के स्थान में इ<sub>१</sub>इ<sub>१</sub> + इ<sub>१</sub>य और इ<sub>१</sub>इ<sub>१</sub> + इ<sub>२</sub>य के उत्थापन से बनी है। इसी इकार इ<sub>२</sub>—इ<sub>१</sub> इसमें भी —इ<sub>१</sub> के स्थान में इ<sub>१</sub>इ<sub>२</sub> + इ<sub>१</sub>य और इ<sub>२</sub> के स्थान में ऊपर जो लिख आए हैं उनके उत्थापन से तत्सम्बन्धी ऊपर का फल बन जायगा। इसलिये घन समीकरण के चलस्पद्धिओं के लिये —इ<sub>१</sub>, —इ<sub>२</sub> और —इ<sub>३</sub> इनके स्थान में ऊपर की राशिओं का उत्थापन दे सकते हैं।

( १ ) यदि अव्यक्त मानों के अन्तर का फल हा वा गा हो ( २२२ प्रक्रम का १ उदाहरण देखो ) तो सोपान और भ्रूव शक्ति दोनों तुल्य होंगे। और अ<sub>२</sub> यौ (इ<sub>१</sub>—इ<sub>२</sub>)<sup>२</sup>

$$= २अ<sub>२</sub> (इ<sub>१</sub> + इ<sub>२</sub> + इ<sub>३</sub> - इ<sub>१</sub>इ<sub>२</sub> - इ<sub>१</sub>इ<sub>३</sub> - इ<sub>२</sub>इ<sub>३</sub>)$$

$$\therefore अ<sub>२</sub>(इ<sub>१</sub> + इ<sub>२</sub> + इ<sub>३</sub> - इ<sub>१</sub>इ<sub>२</sub> - इ<sub>१</sub>इ<sub>३</sub> - इ<sub>२</sub>इ<sub>३</sub>)$$

$$= अ<sub>२</sub>(इ<sub>१</sub> + वाइ<sub>२</sub> + वा<sup>२</sup>इ<sub>३</sub>) (इ<sub>१</sub> + वा<sup>२</sup>इ<sub>२</sub> + वाइ<sub>३</sub>र$$

$$= ६(अ<sub>२</sub> - ७अ<sub>२</sub>)$$

जहाँ वा, वा<sup>२</sup>, र के घनमूल हैं।

चलस्पद्धि बनाने के लिये ऊपर लिखे हुए मानों से बदलनेसे

$$अ<sub>२</sub>^२ \{ (इ<sub>१</sub> + वाइ<sub>२</sub> + वा<sup>२</sup>इ<sub>३</sub>) य + इ<sub>२</sub>इ<sub>३</sub> + वाइ<sub>३</sub>इ<sub>३</sub> + वा<sup>२</sup>इ<sub>१</sub>इ<sub>३</sub> \}$$

$$\times \{ (इ<sub>१</sub> + वा<sup>२</sup>इ<sub>२</sub> + वाइ<sub>३</sub>) य + इ<sub>२</sub>इ<sub>३</sub> + वाइ<sub>३</sub>इ<sub>३</sub> + वाइ<sub>३</sub>इ<sub>२</sub> \}$$

$$= ६(स<sub>२</sub>^२ - स<sub>३</sub>स<sub>१</sub>)$$

२२०वें प्रक्रम के उदाहरण से स<sub>२</sub>—स<sub>३</sub>स<sub>१</sub> का रूप बनाने से और

$$इ_१इ_१ + वाइ_१इ_१ + वा^२इ_१इ_२ = ता_१इ_१ + वाइ_२ + वा^२इ_२ = ता$$

$$इ_२इ_१ + वा^२इ_१इ_१ + वाइ_१इ_२ = मा_१इ_१ + वा^२इ_२ + वाइ_२ = मा$$

ऐसा मानने से हा से चलस्पद्धी

$$\begin{aligned} हा_y &\equiv (अ_०अ_२ - अ_१^२)y^२ + (अ_०अ_३ - अ_१अ_२)y \\ &\quad + (अ_१अ_३ - अ_२^२) \\ &= (ताय + ता_१)(माय + मा_१) \end{aligned}$$

इस प्रकार हा\_y को दो गुण्य गुणक रूप खण्डों में बना सकते हैं।

यदि स, किसी राशि का पूरा वर हो तो इ\_१ = इ\_२ = इ\_३, ऐसा होने से हा\_y के प्रत्येक पद के गुणक शून्य होंगे।

(२) यदि २२२ प्रक्रम के ग से चलस्पद्धी ग\_y बनाओ तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\begin{aligned} अ_०^३ \{ (इ_१ + वाइ_२ + वा^२इ_३)^३ + (इ_१ + वा^२इ_२ + वाइ_३)^३ \} \\ = -२७ अ_०^२अ_३ + २अ_१^३ - ३अ_०अ_१अ_२ \end{aligned}$$

इसे बदल देने से

$$\begin{aligned} अ_०^३ \{ (ताय + ता_१)^३ + (माय + मा_१)^३ \} \\ = -२७ (स_१^२म_० + २स_१^३ - ३स_१म_२स_३) = २७गा_y \end{aligned}$$

२२३ प्रक्रम की युक्ति से जिसमें प्रधान गुणक गा हो ऐसा चलस्पद्धी बनाओ तो

$$\begin{aligned} गा_y &= (अ_०^२अ_३ - ३अ_०अ_१अ_२ + २अ_१^३)y^३ + \\ &\quad ३(अ_०अ_१अ_३ + अ_१^२अ_२ - २अ_०अ_२^२)y^२ \end{aligned}$$



$$-(अ_3अ_0 - १अ_1अ_2अ_3 + २अ_2^2)$$

$$-३(अ_3अ_2अ_0 + अ_2^2अ_1 - २अ_3अ_2^2)य$$

ऊपर के ता और मा से

$$ता^३ - मा^३ = \sqrt{-२७(इ_२ - इ_३)} (इ_३ - इ_१) (इ_१ - इ_२)$$

ऊपर ही की युक्ति से इ\_१, इ\_२, इ\_३ को दूसरे इ\_२इ\_३ + इ\_१य  
इत्यादि मानों से बदल देने से और मानों के अन्तरों को पद  
गुणकों के रूप में लाने से

$$(ताय + ता_१)^३ - (माय + मा_१)^३ = २७ \frac{स_३ \sqrt{गा^२ + ४हा^२}}{अ_०^३}$$

$$= २७ \frac{म_३ \sqrt{\Delta}}{अ_०^३}, \text{ यदि } \sqrt{गा^२ + ४हा^२} = अ_० \sqrt{\Delta}$$

(४) अव्यक्त मानों के अन्तरादि वर्गों के घात को पद  
गुणकों के रूप में ले आने से

$$अ_०^३(इ_२ - इ_३)^२(इ_३ - इ_१)^२(इ_१ - इ_२)^२ \\ = -२७(गा^२ + ४हा^२) = -२७अ_०^२ \Delta$$

इसे ऊपर के उदाहरणों के ऐसा बदल देने से

$$अ_०^६(इ_२ - इ_३)^२(इ_३ - इ_१)^२(इ_१ - इ_२)^२(य - इ_१)^२ \\ य - इ_३^२(य - इ_३)^२ = २७ (गा_१^२ + ४हा_१^२)$$

$$\text{इसलिये} \quad \Delta म_३^२ = गा_१^२ + ४हा_१^२$$

(५), (२) और (३) उदाहरणों से

$$2\alpha_0^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 = 2\alpha_0(\alpha_1\sqrt{\Delta} - \alpha_2)$$

$$\text{वा} - 2\alpha_0^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 = 2\alpha_0(\alpha_1\sqrt{\Delta} - \alpha_2)$$

$$\begin{aligned} \text{दोनों के योग से स्पष्ट है कि } & (\alpha_1\sqrt{\Delta} + \alpha_2)^{\frac{1}{2}} \\ & + (\alpha_1\sqrt{\Delta} - \alpha_2)^{\frac{1}{2}} \text{ इससे} \end{aligned}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \text{ यह अर्थात् } \frac{2\alpha_0\alpha_1\sqrt{\Delta}}{\alpha_0^2}$$

यह वा  $\alpha_1$  यह निःशेष हो जायगा।

**३-चतुर्घात समीकरण और इसके चल और अचल स्पर्द्धी।**

१२०वें प्रक्रम के (२) उदाहरण में दिखला आप हैं कि चतुर्घात समीकरण का दो अचल स्पर्द्धी भा और छ हैं। और २२२ प्रक्रम के हा प्रधान गुणक से २२३वें प्रक्रम में चलस्पर्द्धी हा का भी साधन कर चुके हैं। उसी प्रकार यदि गा प्रधान गुणक से चलस्पर्द्धी गा बनावे तो

$$\alpha_2 \equiv 1\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1 - 2\alpha_1$$

यदि  $\alpha_1, \alpha_2$  इत्यादि के मानों का उत्थान दो तो

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & \alpha_0\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2^2 \\ & + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2^2 \end{aligned}$$

जहां २२३वें प्रक्रम की क्रिया से

$$\alpha_1 = -\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1,$$

$$\alpha_2 = -\alpha_2\alpha_0 - 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2$$

$$आ_1 = -४अ_0अ_1अ_0 - १०अ_1^2अ_1 + १५अ_0अ_2अ_1;$$

$$आ_2 = -१०अ_0अ_2^2 + १०अ_1^2अ_2;$$

$$आ_3 = ५अ_0अ_1अ_2 + १०अ_1^2अ_2 - १५अ_0अ_2अ_3;$$

$$आ_4 = अ_0^2अ_4 + २अ_0अ_1अ_2 + ६अ_1^2अ_2 - ६अ_0अ_2^2;$$

$$आ_5 = अ_0^2अ_5 - २अ_0अ_1अ_2 + २अ_1^2;$$

यहां  $आ_1, आ_2, आ_3, आ_4$  के मान जान लें पर २२७ प्रक्रम की युक्ति से ध्रुवशक्ति ३ विषम होने से चिन्ह बदल देने से  $आ_1, आ_2$  और  $आ_3$  के मान बिना गणना किए ही आ जायेंगे।

गा के मान को यदि  $स_4$  के अव्यक्त मानों अर्थात्  $इ_1, इ_2, इ_3, इ_4$  के रूप में लाओ तो स्पष्ट है कि गा में गुण्य गुणक खण्ड  $इ_2 + इ_3 - इ_1 - इ_4, इ_4 + इ_1 - इ_2 - इ_3, इ_1 + इ_2 - इ_3 - इ_4$  के होंगे और  $इ_1, इ_2, इ_3$  और  $इ_4$  के स्थान में

$$\frac{१}{य-इ_1}, \frac{१}{य-इ_2}, \frac{१}{य-इ_3} \text{ और } \frac{१}{य-इ_4} \text{ क्रम से}$$

इनके उत्थापन से और हर को हटाने के लिये प्रत्येक को

$स_4$  इससे गुण देने से गाय में गुण्य गुणक रूप खण्ड

$$स_4 \left( \frac{१}{य-इ_1} + \frac{१}{य-इ_2} - \frac{१}{य-इ_3} - \frac{१}{य-इ_4} \right) = अ_0ब$$

$$स_4 \left( \frac{१}{य-इ_1} + \frac{१}{य-इ_2} - \frac{१}{य-इ_3} - \frac{१}{य-इ_4} \right) = अ_0भ$$

$$s_2 \left( \frac{1}{y-d_1} + \frac{1}{y-d_2} - \frac{1}{y-d_3} - \frac{1}{y-d_4} \right) = a.m$$

ये होंगे। इन पर से और  $s_2 = a.(y-d_1)(y-d_2)$   
 $(y-d_1)(y-d_2)$  मान लेने से

$$b = (d_2 - d_1)(y-d_1)(y-d_2) - (d_1 - d_2)(y-d_2)(y-d_2)$$

$$b = (d_2 - d_1)(y-d_1)(y-d_2) - (d_2 - d_1)(y-d_1)(y-d_2)$$

$$m = (d_1 - d_2)(y-d_1)(y-d_2) + (d_2 - d_1)(y-d_1)(y-d_2)$$

और  $संज्ञाय = a^2$  बसम।  $हय = -\frac{a^2}{4m}(b^2 + m^2 + m^2)$

इन पर से अनेक और उपयोगी समीकरण बना सकते हो।

५—न घात के एक भ्रूवशक्तिक बहुपद राशि  $f(y, r)$  में  
 यदि  $y = दया + तग, r = द'या + त'ग$  इनका उत्थापन देते हैं तो  
 $f(y, r)$  का मान  $फा(या, रा)$  होता है और  $(y, r)$  का एक  
 दूसरा फल जो  $s$  है वह उसी उत्थापन से सा होता है तो  
 सिद्ध करो कि

$$मान फ\left(\frac{तास}{तार}, -\frac{तास}{ताय}\right) = फा\left(\frac{तासा}{तारा}, -\frac{तासा}{ताबा}\right)$$

जहां मा परिवर्तन में मध्यस्थ है अर्थात्  $मा = दत' - द'त$ ।

यहां  $y = दया + तग, r = द'या + त'ग$

इसलिये माया = त'य - त', मारा = - द'य + द'रा ।

और चलनकलन से

$$\text{मा} \frac{\text{ताया}}{\text{ताय}} = \text{त', मा} \frac{\text{ताया}}{\text{तारा}} = - \text{त, म' } \frac{\text{तारा}}{\text{ताय}} = - \text{द', मा} \frac{\text{तारा}}{\text{तार}} = \text{द' ।}$$

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{\text{तासा}}{\text{ताया}} \frac{\text{ताया}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तासा}}{\text{तारा}} \frac{\text{तारा}}{\text{तार}}$$

$$= - \left\{ \text{द' } \left( \frac{\text{तासा}}{\text{मा तारा}} \right) + \text{त' } \left( - \frac{\text{तासा}}{\text{मा ताया}} \right) \right\}$$

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{तासा}}{\text{ताया}} \frac{\text{ताया}}{\text{तार}} + \frac{\text{तासा}}{\text{तारा}} \frac{\text{तारा}}{\text{तार}}$$

$$= \text{द' } \left( \frac{\text{तासा}}{\text{मा तारा}} \right) + \text{त' } \left( - \frac{\text{तासा}}{\text{मा ताया}} \right)$$

और फ (दया + तरा, द'या + त'रा) ≡ फा(या, रा)

इसमें या और रा के स्थान में  $\frac{\text{तासा}}{\text{मा तारा}}$  और  $-\frac{\text{तासा}}{\text{मा ताया}}$

क्रम से इनके उत्थापन से भ्रुवशक्ति न होने से

$$\text{मान } \left( \frac{\text{तास}}{\text{तार}}, - \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \right) \equiv \text{फा} \left( \frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}, - \frac{\text{तासा}}{\text{ताया}} \right) \dots \dots \dots (१)$$

यदि या और रा के स्थान में क्रम से  $\frac{\text{तासा}}{\text{मा तारा}}$  और  $-\frac{\text{तासा}}{\text{मा ताया}}$

इनका उत्थापन दें तो

मान फ  $\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right)$  स

$$= फा\left(\frac{ता}{तारा}, -\frac{ता}{ताया}\right) सा.....(२)$$

यहां फ  $\left(\frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय}\right)$ , फा  $\left(\frac{ता}{तारा}, -\frac{ता}{ताया}\right)$  से गतिपरम्परासम्बन्धी फलों का ग्रहण किया है अर्थात् फ और फि के मान के उत्थापन से  $\frac{ता}{तार}$ ,  $\frac{ता}{ताय}$ , इत्यादि के तो  $\frac{तान}{तारम}$ ,  $\frac{तान}{तारच=१}$  इत्यादि मान आवेंगे उनसे उतनी बार उन चलराशियों के वश से तात्कालिक सम्बन्ध के मान समझो (चलनकलन का ७० वां प्रक्रम देखो)

(२) यदि तीसरी बहुपद राशि के फ (य, र) और स चल-स्पद्धी हों जहां मान लो कि दोनों चलस्पद्धियों में से एक के समान श हो जाता है और वे ही दोनों चलस्पद्धियों के मान या और स और नये पदगुणकों के वश से क्रम से फाच (य, र) और साच होता है जब य और र के परिवर्तन से श का एक नया रूप होगा। तो चलस्पद्धी क्रम से २२५वें प्रक्रम से

$$मा^म फा (य, र) = फाच (य, र) और मा^म सा = साच$$

इस रूप के होंगे। (१) इन समीकरणों से आप हुए स्वरूपों का उत्थापन (१) में देने से

$$मा^थ फ\left(\frac{तास}{तार}, -\frac{तास}{ताय}\right) = फाच\left(\frac{तासाच}{तापा}, -\frac{तासाच}{ताया}\right)$$

इस पर से सिद्ध होता है कि श का एक चलस्पर्द्धी  
 $\text{फ}\left(\frac{\text{ता}}{\text{तार}}, -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\right)$  यह है।

इसी प्रकार (२) से सिद्ध होगा कि  $\text{फ}\left(\frac{\text{ता}}{\text{तार}}, -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\right)$  स।  
 यदि यह स न घात का हो तो श का अचलस्पर्द्धी होगा और  
 यदि स न से अधिक घात का होगा तो वही श का चलस्पर्द्धी  
 होगा। यहाँ श के घात का द्योतक न है अर्थात् श के मान में  
 अव्यक्त का जो सब से बड़ा घात है उसका द्योतक न है।

(१) यदि  $\text{फ}(\text{य}, \text{र}) = (\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \text{अ}_3, \text{अ}_4) (\text{य}, \text{र})^5$  और  
 $\text{फ} = \text{फा}$ , स = सा तो श का एक अचलस्पर्द्धी

$$(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \text{अ}_3, \text{अ}_4) \left( \frac{\text{ता}}{\text{तार}}, -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \right)^5 \text{ सा}$$

$$= 5 \text{ (अ}_0 \text{अ}_4 - 4 \text{अ}_1 \text{अ}_3 + 2 \text{अ}_2^2) = \text{भा।}$$

(२) यदि स को चतुर्घात समीकरण का चलस्पर्द्धी हाय मान  
 लें और  $\text{फ}(\text{य}, \text{र}) = (\text{अ}_0, \text{अ}_1, \dots, \text{अ}_4) (\text{य}, \text{र})^5$  तो ऊपर की  
 युक्ति से जब  $\text{फ}(\text{य}, \text{र}) = \text{श}$  तो

$$(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \text{अ}_3, \text{अ}_4) \left( \frac{\text{ता}}{\text{तार}}, -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \right) \text{ हाय}$$

$$= 5 \text{ (अ}_0 \text{अ}_2 \text{अ}_4 + 2 \text{अ}_1 \text{अ}_2 \text{अ}_3 - \text{अ}_0 \text{अ}_3^2 - \text{अ}_4 \text{अ}_1^2 - \text{अ}_2^3) = \text{द्वा।}$$

(३) सिद्ध करो कि यदि  $(\text{अ}, \text{क}, \text{ख}, \text{ग}) (\text{य}, \text{र})^3$  का चलस्पर्द्धी  
 गाय हो तो

$$(अ, क, ख, ग) \left( \frac{ता}{तार}, -\frac{ता}{ताय} \right) गाअ$$

$$= -१२ (अ^२ ग^२ - ६अकखग + ४अख^३ + ४कग^३ - ३क^२ख^२)$$

६—यदि  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n)$   $(य, र)^n$  का अचलस्पद्धीं  
फि  $(अ_०, अ_१, \dots, अ_n)$  हो और स कोई  $(य, र)$  का फल न वा  
न से अधिक घात का हो तो

$$\text{फि} \left( \frac{ता^n स}{ताय^n}, \frac{ता^{n-१} स}{ताय^{n-१} तार}, \frac{ता^{n-२} स}{ताय^{n-२} तार^२}, \dots, \frac{ता^n स}{तार^n} \right)$$

यह स का अचल वा चलस्पद्धीं होगा ।

इसकी सिद्धि के लिये कल्पना करो कि

$$य = द'या + त'रा, य' = द'या' + त'रा', र = द'या + त'रा,$$

$$र' = द'या' + त'रा' ।$$

फिर (५) वे उदाहरण ही की युक्ति से इन मानों से समी-  
करणों के बदलने से और उत्थापन से सा = स,

$$य' \frac{तास}{ताय} + र' \frac{तास}{तार} = या' \frac{तास}{ताया} + रा' \frac{तास}{तारा}$$

$$\text{इसलिये उन्हीं संकेतों से} \left( या' \frac{ता}{ताया} + रा' \frac{ता}{तारा} \right)^n सा$$

$$= \left( य' \frac{ता}{ताय} + र' \frac{ता}{तार} \right)^n स$$

दोनों पक्षों को फैलाने से



$$\text{फि (घा}_0, \text{घा}_1, \text{घा}_2, \dots, \text{घा}_n) (\text{या}', \text{रा}')^n \\ = (\text{घा}_0, \text{घा}_1, \text{घा}_2, \dots, \text{घा}_n) (\text{य}', \text{र}')^n$$

इसलिये २२५ प्रक्रम से

$$\text{फि (घा}_0, \text{घा}_1, \text{घा}_2, \dots, \text{घा}_n) = \text{मा}^n \text{फि (घा}_0, \text{घा}_1, \text{घा}_2, \dots, \text{घा}_n) \\ \text{इससे सिद्ध होता है कि फि (घा}_0, \text{घा}_1, \text{घा}_2, \dots, \text{घा}_n) \text{ यह} \\ \text{स का अवल वा चलस्पद्धी जहां } \text{घा}_0 = \frac{\text{ता}^n \text{स}}{\text{तायन}}, \text{ घा}_1 = \frac{\text{ता}^n \text{स}}{\text{तायन}-१} \\ \text{इत्यादि हैं।}$$

यहां इस प्रकार के जो (य, र) और (य', र') हैं इन्हें स्पद्धी चल कहते हैं।

(१) कल्पना करो कि अ.य<sup>२</sup> + २अ.य + अ<sub>२</sub> यह य के रूपान्तर से अ.य<sup>२</sup> + २अ.य + अ<sub>२</sub> ऐसा हुआ तो २२६वें प्रक्रम के (१) उदाहरण से

$$\text{अ.अ}_2 - \text{अ}_1^2 = \text{मा}^2 (\text{अ.अ}_2 - \text{अ}_1^2) = \text{उ}$$

और ऊपर के समीकरण से

$$\text{या}'^2 \frac{\text{ता}^2 \text{सा}}{\text{ताया}^2} + २\text{या}'\text{रा}' \frac{\text{ता}^2 \text{सा}}{\text{ताया} \cdot \text{तारा}} + \text{रा}'^2 \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{तारा}} \\ = \text{य}'^2 \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{ताय}^2} + २\text{य}'\text{र}' \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{तायतार}} + \text{र}'^2 \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{तार}^2}$$

अब ऊपर के उ से

$$\frac{\text{ता}^2 \text{सा}}{\text{ताया}^2} \frac{\text{ता}^2 \text{सा}}{\text{तारा}^2} - \left( \frac{\text{ता}^2 \text{सा}}{\text{तायातारा}} \right)^2 \\ = \text{मा}^2 \left\{ \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{ताय}^2} \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{तार}^2} - \left( \frac{\text{ता}^2 \text{स}}{\text{तायतार}} \right)^2 \right\}$$

इसे सा का हा सम्बन्धी चलस्पद्धी कहते हैं।

(२) ऊपर के उदाहरण में यदि स = (अ, क, ख, ग) (य, र)² हो तो चलस्पद्धी कैसा होगा।

यहाँ स = अय² + ३कय²र + ३खयर² + गर²। इसलिये चलन-कलन से

$$स = अय² + ३कय²र + ३खयर² + गर²$$

$$\frac{तास}{ताय} = ३अय² + ६कयर + ३खर²; \frac{ता²स}{ताय²} = ६अय + ६र$$

$$\frac{तास}{तार} = ३गर² + ६खयर + ३कय²; \frac{ता²स}{ताय²} = ६गर + ६खय$$

$$\frac{ता²स}{तायतार} = ६कय + ६खर, \frac{ता²स}{ताय²} \frac{ता²स}{तार²} = ३६\{(अग + कख) यर + अखय² + कगर²\}$$

$$\frac{ता²स}{ताय²} \frac{ता²स}{तार²} - \left( \frac{ता²स}{तायतार} \right)² = ३६\{(अख - क²)य² + (अग - कख)यर + (कग - ख²)र²\}$$

(३) इसी प्रकार सिद्ध करो यदि स = (अ, क, ग, घ) (य, र)² तो चलस्पद्धी

$$= (अख - क²)य² + २(अग - कख)य²र + (अघ + २कग - ३ख²)य²र² + २(कघ - खग)य²(ख + घ - ग²)र²।$$

७- यदि अव्यक्त राशि शा = सा + अ(यर' - य'र)ⁿ पेसा हो जहाँ

सा = (अ, अ, अ, अ, ..., अ) (य, र)ⁿ और (य, र) और (य', र') परस्पर स्पद्धीचल हैं।

यदि श का कोई अचलस्पर्द्धी बनाया जाय तो उसमें अ के भिन्न भिन्न घातों के गुणक य' और र' के ध्रुवशक्तिक फल होंगे वे सब अलग अलग सा के चलस्पर्द्धी होंगे। क्योंकि गुण-गुणित युत वर्णान्तर जब य, और र को बदलेंगे तो

$$सा = (अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n) (य, र)^n$$

$$= (अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n) (या, रा)^n$$

और  $यर' - य'र = म (यारा' - या'रा)$ । इसलिये  $सा + अ(यर' - य'र)^n$  यह  $(अ_०, अ_१, \dots, अ_n) (या, रा)^n + अमान (यारा' - या'रा)^n$  ऐसा होगा।

इसलिये कोई अचलस्पर्द्धी फा दोनों के बनाए जायँ तो अ के घात वृद्धि में २२६ वें प्रक्रम से

$$(फा_०, फा_१, फा_२, \dots, फा_n) (१, अ)$$

$$= मा^अ (फि_०, फि_१, फि_२, \dots, फि_n) (१, मानअ)$$

जिनसे सिद्ध है कि  $फा_अ = मा^अ फि_अ$  ऐसा होगा। इसलिये  $फा_अ$  यह एक चलस्पर्द्धी है।

यदि  $(यर' - य'र)^n$  इसके स्थान में  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n) (य, र)^n$  को रखें तो ऊपर ही की क्रिया से यह सिद्ध कर सकते हो कि

यदि फा  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n)$  यह  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n) (य, र)^n$  इसका अचलस्पर्द्धी हो तो फा  $(अ_० + अक_०, अ_१ + अक_१, \dots, अ_n + अक_n)$

इसमें ज के भिन्न भिन्न घातों के गुणक  $(अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n)$   $(य, र)^n$  और  $(क_०, क_१, क_२, \dots, क_n)$   $(य, र)^n$  इन दोनों के अचलस्पर्द्धी होंगे।

चलनकलन से यदि ज का घात वृद्धि में फा को ले आओ और

$$क_० \frac{ताफा}{ताअ_०} + क_१ \frac{ताका}{ताअ_१} + \dots + क_n \frac{ताफा}{ताअ_n} = बी_१ \quad \text{तो}$$

$$\begin{aligned} \text{फा} (अ_० + जक_०, अ_१ + जक_१, \dots, अ_n + जक_n) \\ = \text{फा} (अ_०, अ_१, अ_२, \dots, अ_n) + जबी_१ \\ + \frac{ज^२}{२!} बी_२ + \frac{ज^३}{३!} बी_३ + \dots + \frac{ज^थ}{थ!} बी_थ + \dots \end{aligned}$$

ऐसा होगा। इस पर से सब अचलस्पर्द्धियों का पता लग जायगा।

—यदि फे  $(य, र)$  और फै  $(य, र)$  ध्रुवशक्तिक फल हों तो

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{ताफे}{ताय} & \frac{ताफे}{तार} \\ \frac{ताफै}{ताय} & \frac{ताफै}{तार} \end{array} \right|$$

यह कनिष्ठ फल दोनों का चलस्पर्द्धी होगा। क्योंकि यदि दोनों फलों में

$$य = द'या + त'रा, र = द'या + त'रा \text{ इनका उत्थापन दो तो}$$

$$\text{फो} (या, रा) = \text{फे} (य, र), \text{फौ} (या, रा) = \text{फै} (य, र)$$

$$\text{जिनसे } \frac{\text{ताफौ}}{\text{ताया}} = \frac{\text{ताफे ताय}}{\text{ताय तारा}} + \frac{\text{ताफे तार}}{\text{तार ताया}} = \text{द } \frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}} + \text{द' } \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}$$

$$\frac{\text{ताफौ}}{\text{तारा}} = \frac{\text{ताफे ताय}}{\text{ताय तारा}} + \frac{\text{ताफे तार}}{\text{तार ताया}} = \text{त } \frac{\text{ताफे}}{\text{ताया}} + \text{त' } \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}$$

इसी प्रकार

$$\frac{\text{त फौ}}{\text{ताया}} = \text{द } \frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}} + \text{द' } \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}, \frac{\text{ता फौ}}{\text{तारा}} = \text{त } \frac{\text{ताफै}}{\text{ताया}} + \text{त' } \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}$$

इसलिये

$$\begin{aligned} \left| \frac{\text{ताफौ}}{\text{ताया}}, \frac{\text{ताफौ}}{\text{तारा}} \right| &= \left| \text{द } \frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}} + \text{द' } \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}, \text{त } \frac{\text{ताफे}}{\text{ताया}} + \text{त' } \frac{\text{ताफे}}{\text{तार}} \right| \\ \left| \frac{\text{ताफौ}}{\text{ताया}}, \frac{\text{ताफौ}}{\text{तारा}} \right| &= \left| \text{द } \frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}} + \text{द' } \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}, \text{त } \frac{\text{ताफै}}{\text{ताया}} + \text{त' } \frac{\text{ताफै}}{\text{तार}} \right| \\ &= \text{मा} \left( \frac{\text{ताफे ताफै}}{\text{ताय तार}} - \frac{\text{ताफे ताफै}}{\text{तार ताया}} \right) \end{aligned}$$

इस पर से ऊपर की बात सिद्ध हो जाती है।

इसे जकोबी ( Jacobi ) ने निकाला है। इसलिये इसे जकोबी का चलस्पद्धी कहते हैं।

न चलराशियों के यदि भिन्न भिन्न न फल हों तो भी ऊपर की युक्ति से न संख्या पंक्ति से जो कनिष्ठ फल होगा वह उन समीकरण परम्पराओं का चलस्पद्धी होगा।

२२९—चलराशियों का अकरणीगत और ध्रुव-शक्तिक एक फल न है जहाँ ध्रुवशक्ति दो है। इसे एक

ध्रुवशक्ति संबंधी वर्णों के पृथक् पृथक् फलों के वर्ग योग रूप में प्रकाश कर सकते हैं।

कल्पना करो कि वह फल  $y_1, y_2, \dots, y_n$  राशियों का  $भा = पा_1 y_1^2 + 2 बा_1 y_1 + ता_1$  है, जहां  $पा_1$  कोई स्थिर सख्या,  $बा_1$  एक ध्रुवशक्ति संबंधी पृथक् पृथक्  $y_2, y_3, \dots, y_n$  चलराशियों का फल और  $ता_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है तो

$$\begin{aligned} भा &= पा_1 y_1^2 + 2 बा_1 y_1 + ता_1 \\ &= \left( y_1 \sqrt{पा_1} + \frac{बा_1}{\sqrt{पा_1}} \right)^2 + ता_1 - \frac{बा_1^2}{पा_1} \\ &= \left\{ \left( y_1 + \frac{बा_1}{पा_1} \right) \sqrt{पा_1} \right\}^2 + ता_1 - \frac{बा_1^2}{पा_1} \\ &= \left( y_1 \sqrt{पा_1} \right)^2 + भा_1 \end{aligned}$$

$$\text{यदि } या_1 = y + \frac{बा_1}{पा_1}, भा_1 = ता_1 - \frac{बा_1^2}{पा_1}$$

यहां  $भा_1, ता_1 - 1$  चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है।  $ता_1, ता_1 - 1$  चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है और  $बा_1$  का जो  $ता_1 - 1$  चलराशियों का एक घात का ध्रुवशक्तिक फल है, वर्ग करने से वर्ग  $ता_1 - 1$  चलराशियों का दो घात का ध्रुवशक्तिक फल होगा। इसलिये

$भा_1 = पा_1 y_1^2 + 2 बा_1 y_1 + ता_1$  इस प्रकार लिख सकते हैं और ऊपर की युक्ति से

$$\begin{aligned} \text{भा}_1 &= \left\{ \left( y_2 + \frac{\text{बा}_2}{\text{पा}_2} \right) \sqrt{\text{पा}_2} \right\}^2 + \text{ता}_2 - \frac{\text{बा}_2^2}{\text{पा}_2} \\ &= (y_2 \sqrt{\text{पा}_2})^2 + \text{भा}_2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{यदि } y_2 = y_2 + \frac{\text{बा}_2}{\text{पा}_2} \text{ और } \text{भा}_2 = \text{ता}_2 - \frac{\text{बा}_2^2}{\text{पा}_2} \mid$$

इसी प्रकार भा<sub>2</sub> से या<sub>3</sub> और भा<sub>3</sub> इत्यादि बनेंगे।

$$\begin{aligned} \text{इसलिये भा} &= (y_1 \sqrt{\text{पा}_1})^2 + (y_2 \sqrt{\text{पा}_2})^2 \\ &+ (y_3 \sqrt{\text{पा}_3})^2 + \dots \dots + (y_n \sqrt{\text{पा}_n})^2 \end{aligned}$$

जहाँ  $y_n = y_n$ । इसपर से सिद्ध हुआ कि भा को न राशियों के वर्गयोग के समान बना सकते हो।

$$\begin{aligned} 230-\text{फ (य)} &= y_n + p_1 y_n^{-1} + p_2 y_n^{-2} + \dots \dots \dots \\ &+ p_{n-1} y + p_n = 0 \end{aligned}$$

इसमें  $y_n, y_n^{-1}, y_n^{-2}$  इत्यादि के मान  $y_n^{-1}$  और इससे अल्पघातों के रूप में प्रकाश कर सकते हैं क्योंकि

$$\begin{aligned} \text{फ(य)} = 0 &= y_n + p_1 y_n^{-1} + p_2 y_n^{-2} + \dots \dots p_{n-1} y + p_n \\ \therefore y_n &= -p_1 y_n^{-1} - p_2 y_n^{-2} \dots \dots \dots - p_{n-1} y \\ &- p_n \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

य से गुण देने से

$$\begin{aligned} -y_n^{n+1} &= -p_1 y_n^n - p_2 y_n^{n-1} - \dots \dots - p_{n-1} y^2 \\ &- p_n y \end{aligned}$$

$$= -p_1 \left( p_1 \frac{y^{n-1}}{y} - p_2 \frac{y^2}{y} - \dots \dots \dots p_{n-1} y - p_n \right) \\ - p_2 y^{n-1} - p_3 y^{n-2} - \dots \dots \dots - p_{n-1} y - p_n y \quad (१) \text{ से}$$

$$= (p_1^2 - p_2) y^{n-1} + (p_1 p_2 - p_3) y^{n-2} + \dots \dots \dots \\ + (y_1 p_{n-1} - p_n) y - p_n$$

इस प्रकार से  $y^{n+1}$  का मान  $y^{n-1}$  और इससे अल्प घातों के रूप में आया ।

फिर दोनों पदों को  $y$  से गुण देने से  $y^{n+2}$  का मान  $y^n$  और  $y^{n-1}$  इत्यादि एकापचित घातों के रूप में आवेगा । उसमें  $y^n$  के स्थान में (१) के उत्थापन से  $y^{n+2}$  का मान  $y^{n-1}$  और इससे अल्प घातों में आवेगा । इस प्रकार आगे किया फैलाने से  $y$  का  $n$  से आगे चाहे जौन का अभिन्न घात का मान  $y$  के  $n-1$  और इससे अल्प घात के रूप में प्रकाश कर सकते हैं ।

२३१—कल्पना करो कि

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots \dots \dots + p_{n-1} y + p_n \\ = 0 \dots \dots \dots (१)$$

यह एक समीकरण है और मान लो कि

$$r = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots \dots + a_m y^m \dots \dots \dots (२)$$

जहां  $n$  से अल्प  $m$  है और  $a_0, a_1, a_2, \dots \dots, a_m$  ये स्थिर संख्या हैं जो अभी अविदित हैं ।







तब देखोगे कि सा<sub>१</sub> में अ<sub>०</sub>, अ<sub>२</sub> इत्यादि के एक घात हैं। सा<sub>२</sub> में दो घात, सा<sub>३</sub> में तीन घात, ... और सा<sub>n</sub> में n घात हैं। इसलिये सा<sub>१</sub> से अ<sub>०</sub> का मान अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ... के रूप में आवेगा। इसका उत्थापन सा<sub>२</sub> में देने से अ<sub>१</sub> का मान द्विविध अ<sub>२</sub>, अ<sub>३</sub>, के रूप में आवेगा। सा<sub>३</sub> में इन दोनों मानों का उत्थापन देने से अ<sub>२</sub> का मान ६ विध आवेगा।

अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ... अ<sub>m</sub> में किसी एक अ<sub>m</sub> का मान व्यक्त मानें तो अ<sub>m-१</sub> का मान (m-१) ! इतना विध आवेगा।

$$२३३—y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

इसमें मान लो कि

$$x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4$$

और पिछले प्रक्रमों की युक्ति से कल्पना करो कि x रूप में

$$r^n + b_1 r^{n-1} + b_2 r^{n-2} + \dots + b_n = 0$$

ऐसा समीकरण बना जिसमें २३१ प्रक्रम से सगुण है कि ब<sub>१</sub>, अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, ... अ<sub>n</sub> का एक घात का, ब<sub>२</sub> दो घात का, और ब<sub>३</sub> तीन घात का भ्रुवशक्तिरूप फल है। कल्पना करो कि अ<sub>०</sub>, अ<sub>१</sub>, ... अ<sub>n</sub> ऐसे हैं जिनसे

$b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0$ । अब मानों कि  $b_1 = 0$  इससे अ<sub>०</sub> का मान अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, अ<sub>३</sub>, अ<sub>४</sub> इनके रूप में जो आया उसका उत्थापन ब<sub>२</sub> और ब<sub>३</sub> में देने से  $b'_1 = 0, b'_2 = 0$  ऐसा हुआ। जहां  $b'_2$  दो घात का और  $b'_3$  तीन घात का अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ... अ<sub>n</sub> के भ्रुवशक्तिक फल हैं। इसलिये २२६ वें प्रक्रम से

$b'_2 = f^2 + g^2 + h^2 + j^2 = 0$  ऐसी कल्पना कर सकते हैं। जहाँ  $f, g, h, j$  अलग अलग  $a_1, a_2, a_3, a_4$  के एक घात सम्बन्धी फल हैं।

कल्पना करलो कि  $f = g\sqrt{-1}, h = j\sqrt{-1}$

जहाँ दोनों समीकरणों में अलग अलग  $a_1, a_2, \dots, a_4$  के एक ही घात सम्बन्धी फल हैं। मानलो कि इन दोनों से  $a_1$  और  $a_2$  के मान जो  $a_3$  और  $a_4$  के रूप में आए उनके उत्थापन से  $b'_3$  का रूप  $b''_3 = 0$  ऐसा हुआ जो कि  $a_1$  और  $a_2$  का तीन घात का ध्रुवशक्ति फल है। इसमें  $a_1$  और  $a_2$  में से किसी एक का मान कोई इष्ट मान लें तो दूसरे का मान एक घन समीकरण से आ जायगा।

यदि दूसरा, तीसरा और पाँचवाँ पद उड़ाना हो तो ऊपर ही को ऐसी किया करने से अन्त में एक चतुर्घात समीकरण बनेगा।

$r^n + b_1 r^{n-1} + b_2 r^{n-2} + \dots + b_n = 0$  इसमें यदि  $r$  के स्थान में  $\frac{1}{r}$  रख दें तो  $b_n r^n + b_{n-1} r^{n-1} + b_{n-2} r^{n-2} + \dots + 1 = 0$  ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें ऊपर ही की युक्ति से अन्त पद से दूसरा, तीसरा और चौथा वा दूसरा, तीसरा और पाँचवाँ पद उड़ा सकते हो।

२३४—२३३ वें प्रक्रम में जो  $n$  घात का समीकरण है जिस पर  $r$  के  $n$  घात का समीकरण उत्पन्न हुआ है, उसमें यदि  $n=4$  हो तो उसी प्रक्रम की युक्ति से दूसरे, तीसरे और चौथे वा पाँचवें पद को उड़ाने से किसी पंचघात समीकरण का

$r^x + ar + b = 0, r^x + par^2 + ba = 0$  ऐसे दो रूप बना सकते हैं। इसमें यदि  $r = \frac{1}{r}$  ऐसा माना जाय तो दो रूप और  $r'^x + pa'r'^2 + ba' = 0,$

$r'^x + pa'r'^2 + ba' = 0$  इस प्रकार के होंगे। इस प्रकार किसी पंचघात समीकरण का चार रूपान्तर कर सकते हो। यह मिस्टर सीरेट ( Mr Serret ) की कल्पना है। ( See his cours d' Algebre Superieure, Vol 1, Art 192)

२३५—यदि पंचघात समीकरण  $(अ_0 अ_1, अ_2, \dots \dots अ_x)(य, र)^x$  ऐसा हो और इसे  $क_1(य + इ_1 र)^x + क_2(य + इ_2 र)^x + क_3(य + इ_3 र)^x$  इसके तुल्य करें जहाँ  $इ_1, इ_2$  और  $इ_3$   $प_1 य^2 + प_2 य^2 + प_3 य + प_0 = 0$  इसमें के अवयव मान हैं। तब तीनों पंचघातात्मक पदों को फैलाने से और दोनों पक्षों में  $य$  के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$$अ_0 = क_1 + क_2 + क_3, अ_1 = क_1 इ_1 + क_2 इ_2 + क_3 इ_3, अ_2 = क_1 इ_1^2 + क_2 इ_2^2 + क_3 इ_3^2,$$

$$अ_3 = क_1 इ_1^3 + क_2 इ_2^3 + क_3 इ_3^3, अ_4 = क_1 इ_1^4 + क_2 इ_2^4 + क_3 इ_3^4, अ_5 = क_1 इ_1^5 + क_2 इ_2^5 + क_3 इ_3^5 ।$$

इनपर से

$$प_0 अ_0 + प_1 अ_1 + प_2 अ_2 + प_3 अ_3 = 0$$

$$प_0 अ_1 + प_1 अ_2 + प_2 अ_3 + प_3 अ_4 = 0$$

$$प_0 अ_2 + प_1 अ_3 + प_2 अ_4 + प_3 अ_5 = 0$$

इन तीनोंके साथ  $प_0 + प_1 य + प_2 य^2 + प_3 य^3 = 0$  इसको मिलाने से

१	य	य	य
अ <sub>०</sub>	अ <sub>१</sub>	अ <sub>२</sub>	अ <sub>३</sub>
य <sub>१</sub>	अ <sub>१</sub>	अ <sub>३</sub>	अ <sub>४</sub>
य <sub>२</sub>	अ <sub>३</sub>	अ <sub>४</sub>	अ <sub>५</sub>

यह कनिष्ठ फल के रूप में एक समीकरण हुआ जिससे  $y$  के मान विदित होने से  $इ_१, इ_२$  और  $इ_३$  व्यक्त होंगे तब

$$अ_० = क_१ + क_२ + क_३$$

$$अ_१ = क_१ इ_१ + क_२ इ_२ + क_३ इ_३$$

$$अ_२ = क_१ इ_१^२ + क_२ इ_२^२ + क_३ इ_३^२$$

इनसे  $क_१, क_२$  और  $क_३$  भी व्यक्त हो जायँगे।

इस प्रकार दिया हुआ पंचघात समाकरण तीन अव्यक्त राशियों के पंचघात के योग के समान हो सकता है।

इसी प्रकार  $(य, र)$  के  $२न - १$  घात का ध्रुव शक्ति फल,

$$क_१(य + इ_१ र)^{२न-१} + क_२(य + इ_२ र)^{२न-१} + \dots + क_३(य + इ_३ र)^{२न-१}$$

इसके समान हो सकता जहाँ  $इ_१, इ_२, इ_३, \dots$  इत

$प_० य^n + प_१ य^{n-१} + प_२ य^{n-२} + \dots + प_n = ०$  इसमें अव्यक्त के मान हैं।

यह डाक्टर सिल्वेस्टर (Dr. Sylvester) की कल्पना है।

१३६—फ  $(य) = प_० य^n + प_१ य^{n-१} + प_२ य^{n-२} + \dots + प_n = ०$  इस समीकरण के धन मूलों की प्रधान सोमा जाननी है।

कल्पना करो कि अ यह प्रथम पद का गुणक वा उससे अल्प संख्या है और उसके आगे लगातार जितने पदों के धन गुणक हैं उनमें सब से छोटे गुणक के तुल्य वा उससे भी अल्प क है। और आगे जितने ऋण और धन पद हैं उनमें सब से बड़े ऋण गुणक के तुल्य वा उस से बड़ा ग है तो स्पष्ट है कि फ (य) अवश्य धन ही रहेगा।

यदि  $अय^n + क(य^{n-1} + \dots + य^{n-j}) [-ग$   
 $य^{n-j-1} + \dots + 1$

जहाँ सबसे पहिला ऋण पद  $य^{n-j-1}$  है। ऊपर का मान गुणोत्तर श्रेणीसे

$$: अय^n + क \frac{य^n - य^{n-j}}{य - 1} - ग \frac{य^{n-j} + \dots + 1}{य - 1} \text{ यह होगा।}$$

यदि  $य > 1$  तो इसका मान तब धन होगा यदि

$$\{अ(य - 1) + क\} य^n - (क) य^{n-j} + ग \text{ यह अथवा}$$

$$\{अ(य - 1) + क\} य^j - (क + ग) \text{ यह शून्य वा धन हो}$$

(१) इसमें यदि  $क = 0$  और सब से बड़ा ऋण गुणक  $= ग$  तो फ (य) धन होगा

यदि  $अ(य - 1) य^j - (क + ग) य^j$  वा  $अ(य - 1) - ग$  धन हो अर्थात् यदि

$$य = 1 + \frac{ग}{अ} \text{ वा } य, 1 + \frac{ग}{अ} \text{ इससे बड़ा हो। इससे पृ६ वे}$$

प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

(२) मान लो कि  $क = 0$  और सब से बड़ा ऋण गुणक  $= ग$  तो फ (य) धन होगा।

यदि  $अ(य-१)य^ज - ग$  यह धन हो अर्थात् यदि  $अ(य-१)य^{ज+१} - ग$  यह धन हो

अर्थात् यदि  $य, १ + \left(\frac{ग}{अ}\right)^{\frac{१}{ज+१}}$  इसके तुल्य वा इससे बड़ा हो। इससे पूर्व प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

(३) मान लो कि  $अ = ०$  तो  $फ(य)$  धन होगा यदि  $कय^ज - (क+ग)$  यह धन हो अर्थात्  $य, \left(१ + \frac{य}{क}\right)^{\frac{१}{ज}}$  इसके तुल्य वा इससे अधिक हो। यह एक नई सीमा है जो (२) से अल्प होगी यदि अ अर्थात् प्रथम पद के गुणक  $प_०$  से क बड़ा होगा।

(४) यदि क से अ बड़ा न हो तो क के स्थान में अ के उत्थापन से  $फ(य)$  धन होगा यदि  $\{अ(य-१) + अ\} य^ज - (अ+ग)$  यह धन वा शून्य हो अर्थात् यदि  $य, \left(१ + \frac{ग}{अ}\right)^{\frac{१}{ज+१}}$  इसके तुल्य वा इससे बड़ा हो। यदि अ से छोटा क हो तो (३) से जो सीमा होगी उससे यह अल्प आवेगी।

(५) यदि  $अ > ग$  तो (२) से सीमा  $१ + (१)^{\frac{१}{ज+१}} = २$  होगी।

(६) यदि  $क > ग$  तो (३) से सीमा  $२^{\frac{१}{ज}}$  यह होगी।

(७) यदि  $अ > ग$  और  $क > ग$  तो (४) से सीमा  $२^{\frac{१}{ज+१}}$  यह होगी।

यह प्रोफेसर डिमार्गन की कल्पना है।

२३७— $अ + क \sqrt{-१} = इ$  (कोज्या अ, + ज्या अ,  $\sqrt{-१}$ )





१. मू मा = इ कोज्या अ, = अ = भुज ।

मू आ मा = इ ज्या अ, = क = कोटि ।

ऊपर हो की परिभाषा से अ' + क' की मध्यस्थ इ' और उपकरण अ' हो तो मू अ' का मान = इ' और मू या = अ' । और अ + क + अ' + क' = अ + अ' + (क + क')

इसलिये कहेंगे कि दोनों असंभवों के योग रूप असंभव में भुज = अ + अ' और कोटि = क + क' होगी । जिस बिन्दु के ये भुज, कोटि हैं उस बिन्दु के जानने के लिये आ से आ का रेखा मू अ' के समानान्तर और तुल्य बनाओ और आ से मू या पर लम्ब काना और आ से काना पर लम्ब आपा करो तो आपा = अ' और कापा = क' । इसलिये का बिन्दु दोनों असंभव संख्या के योग का प्रकाश करेगा और ऊपर की परिभाषा से

मू का = मध्य {अ + अ' + (क + क')}, यामू का = उप {अ + अ' + (क + क')} इसलिये दो असंभव संख्याओं का योग जानने के लिये एक को पूर्व परिभाषा से मू आ से प्रकाश करो और इसके आ प्रान्त से दूसरी को आ का से प्रकाश करो जहाँ आ का दूसरी के मध्यस्थ के तुल्य है और मू या अक्ष से दूसरी के उपकरण के तुल्य कोण बनाता है तो मू का दोनों असंभवों के योग को प्रकाश करेगी । मू आ + आ का > मू का; इसलिये दोनों के मध्यस्थों का योग, योग रूप असंभव संख्या के मध्यस्थ से अधिक होता है ।

इसी प्रकार यदि तीसरी असंभव संख्या अ'' + क'' को मू अ' से प्रकाश करें और पहिली दो के योग मू का में मिलाना चाहो तो मू अ' के समानान्तर और तुल्य का बा खींचो और मू से खींचो

तक रेखा कर दो। तो ऊपर ही की युक्ति से मू आ, मू ओ' और मू औ असंभवों का योग मू खा के समान होगा। यहां भी योग का मध्यस्थ मू खा के समान होगा और रेखागणित से मू का + काखा, मू खा से अधिक होगा। इस प्रकार आगे भी सिद्ध कर सकते हो कि असंभव संख्याओं के मध्यस्थ के योग से उन असंभव संख्याओं के योग का मध्यस्थ छोटा होता है।

इसी प्रकार यदि मू का में मू ओ को घटाना हो तो मू का को जान कर का से विपरीत दिशा में मू ओ के समानान्तर और तुल्य का आ के बनाने से मू आ को कहेंगे कि दोनों का अन्तर है।

२४१। असम्भवों का गुणन और भजन—

कल्पना करो कि

$$\text{गुण्य} = \text{अ} + \text{क} = \text{इ} \left( \text{को ज्या अ}_1 + \text{ज्या अ}_1 \right)$$

$$\text{गुणक} = \text{अ}' + \text{क}' = \text{अ} \left( \text{को ज्या अ}'_1 + \text{ज्या अ}'_1 \right)$$

डे माइवर (De Moivre) के सिद्धान्त से

$$(\text{अ} + \text{क}) (\text{अ}' + \text{क}') = \text{इइ}' \{ \text{को ज्या} (\text{अ}_1 + \text{अ}'_1) + \text{ज्या} (\text{अ}_1 + \text{अ}'_1) \}$$

इससे सिद्ध होता है कि दो असंभवों का गुणन फल एक असंभव संख्या है जिसमें मध्यस्थ गुण्य गुणकों के मध्यस्थ के गुणन फल तुल्य और उपकरण दोनों के उपकरणों के योग तुल्य होता है।

इसी प्रकार

$$\frac{अ + /क}{अ' + /क'} = \frac{इ}{इ'} \left\{ कं ज्या (अ, - अ',) + ज्या (अ, - अ',) \right\}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि दो असंभवों के मजन में लब्धि एक असंभव संख्या होती है जिसमें मध्यस्थ भाज्य के मध्यस्थ में भाजक के मध्यस्थ का भाग देने से जो लब्धि हो, वह होता है और उपकरण, भाज्य के उपकरण में भाजक के उपकरण को घटा देने से जो शेष बचता है वह होता है।

गुणन की क्रिया से स्पष्ट है कि  $(अ + /क)^n$  यह एक प्रकार की  $अ + /क$  ऐसी असंभव संख्या होगी जहाँ  $अ$  और  $क$  दोनों संभव संख्या हैं।

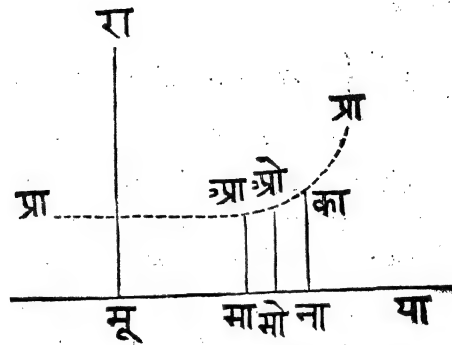
इसी प्रकार

$$अ_0 ल^n + अ_1 ल^{n-1} + अ_2 ल^{n-2} + \dots + अ_{n-1} ल + अ_n$$

इस बीजगणितीय बहुपदराशि में जहाँ  $ल$  के घातों के गुणक संभव वा असंभव संख्या हैं।  $ल$  के स्थान में  $अ + /क$  का उत्थापन दें तो योग और गुणन की युक्ति से स्पष्ट है कि बहुपदराशि एक  $अ + /क$  ऐसी असंभव संख्या होगी। इसमें यदि  $अ$  और  $क$  दोनों शून्य हों तो वह बहुपदराशि भी शून्य के समान होगी।

(१५ वां प्रक्रम देखो)

२४२—यदि  $श = फ(ल)$  ऐसा एक समीकरण हो और  $मू य$ , और  $मू ग$  परस्पर लम्बरूप अक्ष कल्पना कर  $मू$  से  $मू मा = अ$  बनावें और  $अ$  का उत्थापन  $फ(य)$  में  $(ल)$  के स्थान में देकर



फ (अ) को मा अ के तुल्य काट ले जो कि मू या पर लम्ब है तो कहेंगे कि जब ल=अ तो फ (ल)=अमा। इसी प्रकार जब ल=मू ना तो फ(ल)=ना का—इस प्रकार यदि ल की मू से या की ओर धन और इसके विरुद्ध दिशा की ओर ऋण गणना समझे और मू या के ऊपर रा की ओर धन गणना और इसके विरुद्ध ऋण गणना समझे तो ल के स्थान में  $-\infty$  और  $+\infty$  के बीच सब संभव संख्याओं का उत्थापन देने से जो फ (ल)=श के भिन्न भिन्न धन वा ऋण मान होंगे ऊपर की युक्ति से या के अर्थों के ऊपर उन उन मानों के तुल्य लम्ब खड़ा करने से लम्बाओं में गत एक प्रा आ का गा वक्र रेखा होगी जिसे फ (ल) की वक्र रेखा कहते हैं। इसके बलसे किसी ल के मान में फ(ल) का मान जान सकते हो। जैसे जब ल=मू मो=ख तब फ(ल) का मान जानना हा तो मू से धन गणना या की ओर ख संख्या के तुल्य मू मो काट लेने से मो पर एक ओ मो लम्ब खड़ा करने से यह जहाँ वक्र के ओ बिन्दु पर लगा वहाँ से मो तक

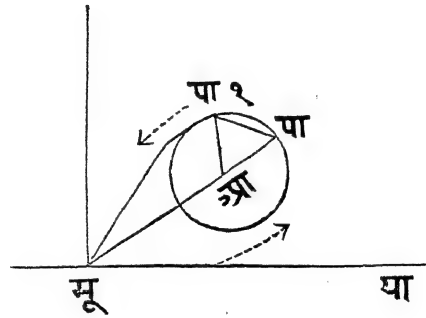
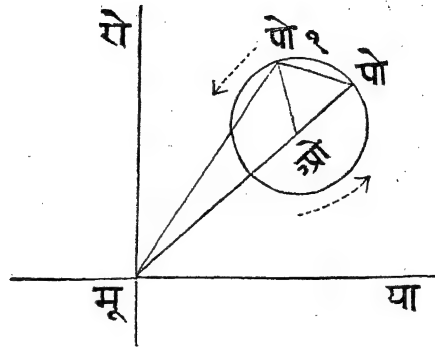
ओ मो का नापने से प्रमाण हो वही स तुल्य ल के मान में फ(ल) अर्थात् फ (ल) का मान होगा।

२४३। ऊपर के प्रक्रम से फ (ल) की वक्र रेखा तभी तयार हो सकती है जब ल— $\infty$  और  $+\infty$  के बीच संभव संख्यात्मक हो और इससे अन्यथा स्थिति में अर्थात् सर्वत्र चाहे ल संभव वा असंभव हो ऊपर की युक्ति से फ (ल) की वक्र रेखा नहीं बन सकती। इसलिये सर्व साधारण के लिये अब युक्ति लिखते हैं। कल्पना करो कि

$$\text{फ (ल)} = \text{अ}_0 \cdot \text{ल}^n + \text{अ}_1 \cdot \text{ल}^{n-1} + \text{अ}_2 \cdot \text{ल}^{n-2} + \dots + \text{अ}_{n-1} \cdot \text{ल} + \text{अ}_n$$

जहाँ ल = य - १२ जहाँ य और २ दोनों के मान में जहाँ तक संभव है सब संभाव्य संख्या का उत्थापन दे सकते हैं।  $य + १२ = ल$  ऐसे ल को जिसके मान में संभव और असंभव दोनों चल रहते हैं मिश्रचल कहते हैं। इसमें यदि  $२ = ०$  और य के स्थान में— $\infty$  और  $+\infty$  के बीच के मानों का उत्थापन दें तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से ल के संभव मान में फ (ल) की वक्र रेखा बनेगी; इसलिये मिश्रचल ल के फल की जो वक्र रेखा होगी उसी का एक विशेष अर्थात् संभव ल के मान में जो ऊपर के प्रक्रम से वक्र रेखा होगी वह एक रूप है। इस लिये मिश्रचल के फल की जो वक्र रेखा होगी वह सर्व साधारण के लिये उपयोगी है।

कल्पना करो कि ल = य + १२ इसका कोई एक मान २३६ प्रक्रम से मू पा अर्थात् पा विन्दु पर है और ल के स्थान इस



मान का उत्थापन देने से जो फ (ल) का मान २४० प्रक्रम से आ + का होगा उसका मान साफ साफ समझने के लिये अलग २३६ प्रक्रम से पो बिन्दु पर है अर्थात् मू' पो है। इसी प्रकार ल के दूसरे मान में अर्थात् य + १२ के दूसरे मान में इसका प्रमाण १, को समझो और उसके वश से फ (ल) का मान जो असंभव होगा वह पो, है। इस प्रकार से प्रत्येक य + १२ के भिन्न

भिन्न मान में भिन्न भिन्न प, प, इत्यादि विन्दु से एक तीर के मुख दिशा की ओर घूमता हुआ वक्र बनेगा जिसे  $y + \text{र}$  का वक्र कहेंगे और इसके वर से एक फ़ (ल) का पो पो, वक्र बनेगा जिसका घुमाव भी यहां पर तीर के मुख की ओर मान लिया है।

कल्पना करो कि ल के  $y + \text{र}$  मान का द्योतक प और  $y' + \text{र}'$  मान का द्योतक प, विन्दु है तो

$$\text{ल} = y + \text{र} = \text{श्रु} \text{ (कोज्याष + ज्याष)} \quad \text{ल}' = y' + \text{र}'$$

$= \text{श्र}' \text{ (कोज्याष}' + \text{ज्याष}')$  मू प, मू प और प प, का योग है (२३९ प्रक्रम से)।

इसलिये प प, को ल की असंभव गति कहेंगे और यदि  $\text{ल}' = \text{ल} + \text{च}'$  जहां  $\text{च} = \text{श्रु}$ , (कोज्याष, + ज्याष,) और  $\text{च}$  में  $\text{श्रु} = \text{प प}'$  और  $\text{ष}$ ,  $\text{च}$  का उपकरण है अर्थात् मू या अक्ष से प प, रेखा जो कोण बनाती है, उसका मान है।

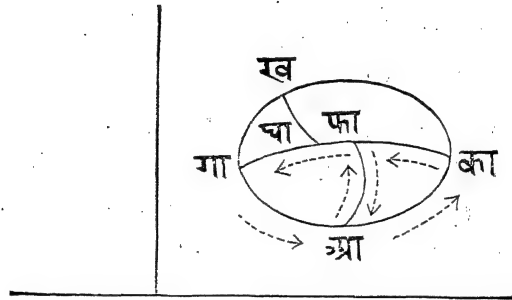
मू प,—मू प को ल के मध्यस्थ को गति कहें हैं जो कि  $\text{श्रु}' - \text{श्रु}$  के तुल्य है और  $\text{प}' - \text{प}$  का ल के उपकरण की गति कहते हैं। और  $\text{च}$  को जिसे  $\text{श्रु}$ , (कोज्याष, + ज्याष,) इसके तुल्य ऊपर मान लिया है, ल की गति कहते हैं।

कल्पना करो कि य, र के भिन्न भिन्न मान से प एक सीमित वक्र बनाता है। यदि घूमते घूमते प फिर अपने स्थान पर पहुँचेगा तो प के मध्यस्थ का मान फिर उसी प्रथम मान के तुल्य होगा और उपकरण भी वही होगा जो कि प्रथम में था। यदि मू विन्दु वक्र के बाहर हो तो और यदि मू वक्र के



भीतर पड़ जायगा तो ऊपकरण का मान प्रथम मान से २०० तुल्य बढ़ जायगा अर्थात् उपकरण की गति तब २०० होगी ।

यदि मिश्रचल दो विरुद्ध दिशाओं में चल कर एक ही रेखा को चाहे वह वक्र वा सरल हो उत्पन्न करे तो एक ओर चलने में जितनी उपकरण की गति घन होगी उतनी ही विरुद्ध दिशा में चलने से शून्य होगी; इसलिये समग्र गति शून्य होगी । इस पर से नीचे का सिद्धान्त उत्पन्न होता है ।



कल्पना करो कि आ का ख गा क्षेत्र का का गा, आ फा, घाखे, इत्यादि रेखाओं से कई विभाग कर डाला तो आ स्थान से तीर की ओर से क्षेत्र की परिधि पर चलते हुए प विन्दु की परिधि के पूरे भ्रमण से जो उपकरण की गति होगी वही सब क्षेत्र खण्डों की प्रत्येक सीमा पर उसी चाल से घूम आने पर भी उपकरण की गति होगी, क्योंकि बड़े क्षेत्र की परिधि के भीतर क्षेत्र खण्डों की जितनी सीमायें हैं उन पर परस्पर विरुद्ध दिशा से दो चेर चलने से ऊपर की युक्ति से समग्र उपकरण की गति उतने

चलन में शून्य होगी। जैसे आ का फ क्षेत्र खण्ड की सीमा पर आ से तीरों की ओर चलने से जिस दिशा में प, का बिन्दु से चल कर आ पर आवेगा उससे विरुद्ध आ से फा की ओर आ का गा क्षेत्र खण्ड की सीमा पर घूमने के लिये चलना पड़ेगा। इस प्रकार भीतर जितनी सीमार्य हैं उन पर विरुद्ध दिशा से दो बर चलने में तत्संबन्धी उपकरण की समग्र गति शून्य होगी। केवल बाहर की सीमाओं पर एक बर चलने से तत्संबन्धी समग्र गति वही होगी जो कि बड़े क्षेत्र की समग्र परिधि घूमने से उत्पन्न होती है। क्योंकि सब क्षेत्र खंडों की बाहरी सीमाओं का योग बड़े क्षेत्र की परिधि ही है।

२४४। कल्पना करो कि मिश्रचल ल, ल, मान से चलना आरम्भ किया और इसकी अल्पगति  $\epsilon = \text{श्रु}, (\text{कोज्यष}, + \text{ज्याष},)$  है तो

$$फ(ल) = फ(ल + \epsilon) = फ'(ल) + फ''(ल) \epsilon +$$

$$फ'''(ल) \frac{\epsilon^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

$$फ(ल) \text{ की गति} = फ(ल + \epsilon) - फ(ल)$$

$$= फ'(ल) \epsilon + फ''(ल) \frac{\epsilon^2}{1 \cdot 2} + फ'''(ल) \frac{\epsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

इस में  $\epsilon$  के प्रत्येक घात के गुणक प्रसिद्ध असंभव संख्या हैं जिनके मध्यस्थ यदि श्र, क, ग, ... मान लिए जायें तो २४१ प्रक्रम से, क्रम से पदों के मध्यस्थ श्र, कश्र, गश्र, ... होंगे और इन मध्यस्थों के योग से २४० वें प्रक्रम से इनके योग  $फ(ल + \epsilon) - फ(ल)$  इसका अर्थात्  $फ(ल)$  के गति का मध्यस्थ छोटा होगा; इसलिये श्र, का ऐसा छोटा मान मान सकते

हैं जिससे उससे भी छोटा फ (ल) की गति का मध्यस्थ होने से फ (ल) की गति चाहे जिस निर्दिष्ट संख्या से छोटी हो सकती है। क्योंकि जैसा जैसा मध्यस्थ छोटा होता है असंभव संख्या का मान भी वैसा वैसा छोटा होता है ( १५ वां प्रक्रम देखो ) इस पर सं कह सकते हो कि जैसा जैसा मिश्रचल, ल चलेगा वैसावैसा फ (ल) भी चलेगा अर्थात् मिश्रचल ल बढ़ता चलेगा तो फ (ल) भी बढ़ता जायगा और यदि ल घटता चलेगा तो फ (ल) भी घटता जायगा।

इसलिये यदि पा विन्दु घूम कर एक वक्र बनावेगा तो पो भी घूम कर उसी दिशा से एक वक्र बनावेगा और पा घूमते घूमते जब फिर अपने मूल स्थान पा पर पहुँचेगा तो उसी समय पो भी अपने वक्र में घूम कर फिर अपने मूल स्थान पो पर पहुँचेगा। ( २४३ वां प्रक्रम का क्षेत्र देखो )। अब प्रकृत में इस बात का विचार करना है कि यदि पा चल कर एक छोटा वक्र बनावे तो उतने समय में पो चल कर जो अपने वक्र की परिधि पर घूम कर अपने मूल स्थान पर आवेगा उस समय फ (ल) के उपकरण की क्या गति होगी।

कल्पना करो कि आ एक विन्दु है जिसका भुज=य, और कोटि र, है तो ल=य + १/२, ( २४३ वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो ) अब इस विचार में दो भेद हैं।

(१) जब य + १/२ यह फ (ल)=० इसमें का कोई अव्यक्त-मान नहीं है अर्थात् ल के स्थान में य + १/२ = ल के उत्थापन से फ (ल) का मान जब शून्य से भिन्न मू' ओ है।

(२) जब फ (ल)=० इसका एक मूल य + १/२ है अर्थात् ल के स्थानमें य + १/२ = ल, इसके उत्थापन से जब फ (ल)=०।

(१) स्थिति में आ संबन्धी मान  $f(l)$  का ओ कल्पना करो (२४३ वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो) जहां  $m'$  ओ शून्य नहीं है। मान लो कि  $l = l_0 + \epsilon$  जहां  $\epsilon = \epsilon_1$  (कोज्याष, + ज्याष, ) और कल्पना करो कि पा जो कि  $l$  का द्योतक है आ के चारों ओर एक बहुत ही छोटा वक्र बनाता है। पो जो कि  $f(l)$  का द्योतक है जब आ से चल कर पा बिन्दु पा, पर पहुँचा अर्थात् जब  $l$  की गति का मध्यस्थ आ पा =  $\epsilon_1$ , हुआ उस समय ओ से चल कर पो, पर पहुँचा। इसलिये उस समय  $f(l)$  की गति ओ पो, से द्योतित होगी अर्थात्  $f(l)$  के गति का मध्यस्थ ओ पो, होगा जो कि इसी प्रक्रम के आदि में लिखी हुई युक्ति से  $\epsilon_1$  को बहुत छोटा मानने से एक निर्दिष्ट संख्या  $m'$  ओ से सर्वदा छोटा होगा। इसलिये  $\epsilon_1$  को ऐसा छोटा मान सकते हैं कि पा आ की चारों ओर एक बहुत छोटा वक्र बनावे जिसके वश  $f(l)$  का द्योतक पो जो ओ की चारों ओर घूम कर वक्र बनाता है उसके बाहर  $m'$  बिन्दु पड़े। इस पर से यह सिद्ध होता है कि पा जो ऐसे वक्र में घूमा है जिसके अन्तर्गत कोई ऐसा  $l$  का मान नहीं है। इसके उत्थापन से  $f(l) = 0$  हो तो तत्सम्बन्धी  $f(l)$  का द्योतक पो जो वक्र बनावेगा उसके बाहर  $m'$  के पड़ जानेसे उस समय  $f(l)$  के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी (२४३ प्रक्रम देखो)।

(२) स्थिति में मानों कि  $f(l) = 0$  इसका एक मान जो इसमें  $m$  बार आया है वह  $\epsilon_0 + \epsilon_1 = l_0$  यह है तो

$$f(l) = (l - l_0)^m \quad f(l) = \epsilon^m f(l) \\ = \epsilon_1^m (\text{कोज्यामष,} + \text{ज्यामष,}) f(l)$$

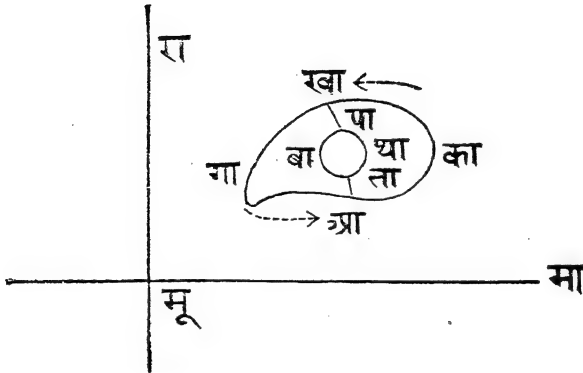
इस स्थिति में  $m \cdot \theta = 0$  इसलिये जब या एक सीमित वक्र  $\theta$  की चारों ओर बनावेगा उतने ही में अपने मूल स्थान पर पहुँचेगा। इसलिये  $f(\lambda)$  के उपकरण की गति सीमित वक्र के भीतर  $m'$  के पड़ जाने से २ का अर्थव्यवस्था होगी जो कि उपकरण के समीकरण से

$\frac{d}{dt} f(\lambda) = (m \cdot \theta + \text{उपकरण } f(\lambda))$  यह समीकरण २४१ प्रक्रम से बनता है इस पर से विदित हो सकती है। क्योंकि  $f(\lambda)$  के उपकरण की गति,  $=$  गति (  $m \cdot \theta$  ) +  $f(\lambda)$  के उपकरण की गति, परन्तु  $f(\lambda) = 0$  इसका कोई मान या के सीमित वक्र के अन्तर्गत है; इसलिये (१) स्थिति से  $f(\lambda)$  के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी और  $\theta$  के एक बेर  $\theta$  के चारों ओर भ्रमण करने से  $\theta$  और  $\theta$ , की प्रवृत्ति या मूल बिन्दु ही के होने से  $\theta$ , की गति २ होगी। इसलिये इसे  $m$  से गुण देने से  $f(\lambda)$  के उपकरण की गति २  $m$  हुई। इससे सिद्ध हुआ कि यदि  $\theta$  बहुत छोटा एक सीमित वक्र बनावे जिससे अन्तर्गत  $f(\lambda) = 0$  इस एक  $\theta$  मूल जो कि  $m$  बार है,  $\theta$  हो तो  $f(\lambda)$  के उपकरण की वृद्धि  $2m$  होगी।

### २४५। काशी का सिद्धान्त (Cauchy's Theorem)

जब  $\lambda$  दो विरुद्ध दिशा में चल कर एक ही रेखा को बनावेगा ( २४२ वां प्रक्रम देखो ); इसलिये  $f(\lambda)$  के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी। जैसा कि उसी प्रक्रम में एक क्षेत्र के भीतर कई क्षेत्र खण्डों को बनाकर दिखलाया है। इसलिये समग्र क्षेत्र खण्डों की सीमा पर  $\lambda$  के चलने से जो  $\lambda$  के उपकरण की गति होगी वह पूरे क्षेत्र की बाहरी सीमा पर

ल के घूमने से जो ल के उपकरण की गति होगी उसके तुल्य होगी, इसलिए क्षेत्र खण्डों के वश से जो फ (ल) अपने क्षेत्र के भीतर अनेक क्षेत्र खण्ड बनावेगा उनकी सब सीमाओं के वश से वही फ (ल) के उपकरण की गति होगी जो फ (ल) के पूरे क्षेत्र की बाहरी सीमाओं पर चलने से उत्पन्न होती है।



कल्पना करो कि या रा के धरातल में एक कोई सीमित वक्र है। और पहिले मानो कि इसके भीतर ल के जो अनेक मान हैं किसी के वश से  $फ (ल) = 0$  यह ठीक नहीं होता तो २४२ प्रक्रम के (१) से कहेंगे कि चाहे वक्र के भीतर कितने ही क्षेत्रखण्ड किए जायँ और सभी की सब सीमाओं पर ल बड़े वक्र की परिधि पर ल चले परन्तु फ (ल) के उपकरण की समग्र गति शून्य ही होगी। दूसरी बार ऐसा मानो कि वक्र के भीतर एक ऐसा बिन्दु है जिसके वश से जो ल होगा वह  $फ (ल) = 0$  इसके एक मूल के, जो कि म बार आया है,

तुल्य है। वक्र के भीतर एक बहुत छोटे सीमित वक्र पा बा ता था को मान लो कि इस बिन्दु को चारो ओर से घेरे हुए है अर्थात् इसके भीतर में वह बिन्दु पड़ा है तो वक्र की आ का खा गा परिधि के ऊपर ल के चलने से जो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति होगी वह आ का खा या था ता, खा गा आ ता बा पा, पा बा ता था के ऊपर ल के चलने से जो फ (ल) के उपकरण की भिन्न भिन्न गति होंगी उनके योग के तुल्य होगी। परन्तु पहिले दो क्षेत्र खण्डों के बाहर उस बिन्दु के पड़ जाने से तत्सम्बन्धी गति शून्य होगी और तीसरे के भीतर उस बिन्दु के पड़ जाने से उसकी परिधि पर वा बड़े क्षेत्र की परिधि आ का खा गा पर ल के चलने से २४२ प्रक्रम के (२) स्थिति से फ (ल) के उपकरण की समग्र गति २ म ग होगी। इसी प्रकार यदि बड़े क्षेत्र की परिधि के भीतर दूसरी तीसरी इत्यादि ऐसे बिन्दु हों जिनके वश से जो ल के मान भिन्न भिन्न होंगे वे क्रम से फ (ल) = ० इसके उन मूलों के समान हों जो क्रम से समीकरण में म' म'' इत्यादि वार आए हों तो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति = २ ग (म + म' + म'' + इत्या) यह होगी। इस पर से काशी ने यह सिद्धान्त निकाला—

यदि मिश्रचल ल एक सीतिम वक्र के भीतर हो और इन ल के मानों के भीतर जानना हो कि फ (ल) = ० इसके कितने मूल पड़े हैं तो उस वक्र की परिधि पर ल के चलाने से जो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति उत्पन्न हो उसमें २ ग के भाग देने से लब्धि निकालो। लब्धि की संख्या जो हो उतने ही कहेंगे कि क्षेत्र फल के भीतर के ल मानों के बीच फ (ल) = ० इसके मूल है।

२४६। कल्पना करो कि मिश्रचल ल का अकरणी गत धन

$$फ(ल) = अ_० ल^n + अ_१ ल^{n-१} + अ_२ ल^{n-२} + \dots$$

$$+ अ_{n-१} ल + अ_n$$

यह एक फल न घात का है। इसमें यदि  $फ(ल) = ०$  तो जानना है कि संभव और असंभव मिल कर ल के कितने मान होंगे। कल्पना करो कि ल एक ऐसे बड़े वृत्त को बनाता है जिसके अन्तर्गत ही सब ल के मान पड़े हैं। उसके बाहर कोई भी ल का मान नहीं पड़ा है। यदि

$$फ(ल) = ल (अ_० + अ_१ ल' + अ_२ ल'^२ + \dots + अ_n ल'^n)$$

$$= ल^n फा(ल'), \text{ जहां } ल' = \frac{ल}{ल}$$

ऐसा लिखें तो ल', जिसका मध्यस्थ ल के मध्यस्थ के हरात्मक मान के तुल्य है वह, जब ल एक बड़ा वृत्त बनावेगा, तब एक छोटा वृत्त बनावेगा। बड़ा वृत्त बड़े से बड़ा ऐसा बना सकते हैं जिसके वश से ल का मध्यस्थ बहुत बड़ा और ल' का ऐसा छोटा हो सकता है कि जिसके वश से ल' जो छोटा वृत्त बनावेगा उसके अन्तर्गत  $फा(ल') = ०$  इसका कोई मूल न हो तब  $फ(ल) = ल^n फा(ल')$  इससे

$फ(ल)$  के उपकरण की गति। परन्तु  $फा(ल') = ०$  इसका कोई मूल ल' के छोटे वृत्त के भीतर नहीं है; इसलिये  $फ(ल)$  के उपकरण की गति = ल^n के उपकरण की गति +  $फा(ल)$  के उपकरण की गति = ल^n के उपकरण की गति।

परन्तु यदि  $ल = शु$  (को ज्या ष + १/ज्याष) तो  $ल^n = शु^n$  (को ज्या न ष + १/ज्या नष) इसलिए ष की वृद्धि परिधि पर एक बेर पूरा घूमने से २π होगी। इसलिये  $फ(ल)$  के उपकरण की



समग्र गति =  $n \times २\pi$ , इसमें  $२\pi$  का भाग देने से फ (ल) = ०  
इसमें ल मानों की संख्या न होगी। इस प्रकार काशी के  
सिद्धान्त से सिद्ध हुआ कि किसी न घात समीकरण में अव्यक्त  
का मान न विध होगा जो कि २४ वें प्रक्रम में अनुगम और  
अनुमान से सिद्ध किया है।

ध्यान देकर देखो तो यह सिद्धान्त समीकरण मीमांसा में  
सब सिद्धान्तों का मूल सिद्धान्त है। इसी पर से और और  
सिद्धान्तों की सृष्टि हुई है। और इसी पर से यह भी सिद्ध  
होता है कि प्रत्येक समीकरण में कुछ न कुछ अव्यक्त का मान  
रहता है जिसके उत्थापन से वह समीकरण, फ (ल) = ०  
ऐसा होगा।

२४७। (१) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्ग ४ संख्या  
के तुल्य होता है? इस प्रश्न को साधारण बीजगणित की युक्ति  
से ऐसे करते हैं। मान लो कि वह संख्या  $y$  है तो आलाप  
से  $y^2 = ४$   $\therefore y^2 - ४ = ०$  तब गुण्य गुणक खण्ड वा वर्ग  
समीकरण की युक्ति से  $y = \pm २$  अर्थात् कहोगे कि वह संख्या  
धन वा ऋण २ है। इस तरह से उत्तर द्विविध हुआ।

(२) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्ग मूल  $\pm २$  है।

(३) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्गमूल  $+ २$  है।

(४) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्गमूल  $- २$  है।

बीजगणित की साधारण युक्ति से ऊपर के तीनों प्रश्नों के  
उत्तर में लोग एक ही साधारण संख्या ४ कहते हैं। परन्तु  
ध्यान देकर यदि सोचो तो तीनों के उत्तर में परस्पर भ्रम न  
पड़े इसके लिये तीनों के लिये कुछ सङ्केत कल्पना करना चाहिए

अर्थात् जिस ४ के मूल से घन २ और ऋण २, दोनों का ग्रहण करते हैं उस ४ से भिन्न होने के लिये ४ में एक ऐसा सङ्केत करना चाहिये जिससे यह बोध हो कि ऋण मूल २ के वर्ग के समान यह है। जिसमें मूल लेने में ऋण २ ही का ग्रहण किया जाय। इसी प्रकार ४ में एक दूसरा सङ्केत भी ऐसा होना चाहिए जिससे समझा जाय कि यह + २ का वर्ग है और इस का मूल + २ ही अपेक्षित है। और जिस ४ में ये दोनों सङ्केत मिले हों उससे समझना चाहिए कि साधारण ४ प्रसिद्ध है। इसी प्रकार बीजगणित से वा इस ग्रंथ से प्रसिद्ध है कि ४ का घनमूल त्रिविध होगा; इसलिये अलग अलग इन तीनों के घन को समझने के लिये ४ में तीन सङ्केत कल्पना करनी चाहिए और जिस ४ में तीनों सङ्केत एकट्ठे देखे जाय उसे समझना चाहिए कि साधारण ४ है। इस प्रकार किसी साधारण संख्या आ का न घात मूल न विध होते हैं। उन न ओं के न घात को अलग अलग समझने के लिये आ में अलग अलग न सङ्केत करना चाहिए और जिस आ में न ओं सङ्केत एकट्ठा पाए जाय उससे समझना चाहिए कि साधारण प्रसिद्ध संख्या आ है।

२४८। आ साधारण संख्या के न घात मूल का एक मान जो पाटीगणित से आता है उसे अलग अलग के न घात मूलों से गुण देने से न गुणन फल आ के न विध न घात मूलों के मान होते हैं (८४ वां प्रक्रम देखो)।

कल्पना करो कि डिमाइवर के सिद्धान्त से १ के न घात मूल का एक मान,  $अ_१ = कोज्या \frac{२\pi}{n} + ज्या \frac{२\pi}{n}$  है (६३ वां प्रक्रम देखो) तो ६३ वें प्रक्रमसे सब मान  $अ_१, अ_२, अ_३, \dots, अ_n$

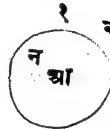
होंगे। इन्हें पाटीगणित से जो एक मान, आ के न घात मूल का आया है उससे गुण देने से क्रम से जो आ के न घात मूलों के मान आवेंगे उन्हें क्रम से पहिला, दूसरा, तीसरा, इत्यादि कहो। संख्या में इन्हें १, २, ३,.....न संख्य कहेंगे।

न १ २  
न आ ३  
६ ५ ४

इस सङ्केत से समझो कि वह आ है जिसके सब न घात मूल अपेक्षित हैं जो कि ऊपर की युक्ति से साधारण आ संख्या है। वृत्तमध्यगत आ के शिर से वाई ओर भुंका उपरिगत, वृत्तान्तर्गत न से समझो कि यह आ अपने न घात मूलों के न घातों से बना है। परिधि पर तुल्यान्तरित १, २, ३, न, से समझो कि आ के सब न घात मूल लिए गए हैं।



इससे समझो कि वह आ है जिसका पहिला, और दूसरा न घातमूल छोड़ और सब न घातमूल अपेक्षित हैं।



इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल पहिला, और दूसरा न घातमूल अपेक्षित हैं।



इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल पहिला और छठवां न घातमूल अपेक्षित हैं।



इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल छठवां न घातमूल अपेक्षित है।

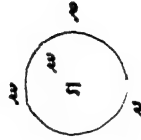
इसी प्रकार संख्याओं के उत्थापन से



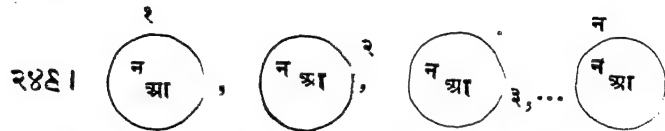
इससे समझना चाहिए कि ८ का पहिला जो घन-मूल है उसका घन है अर्थात् यह वह ८ है जिसका केवल पहिला घनमूल अपेक्षित है।




इससे समझना चाहिए कि ८ का दूसरा घनमूल जो होगा उसका यह घन है अर्थात् यह वह ८ है जिसका केवल दूसरा घनमूल अपेक्षित है।



इससे समझना चाहिए कि यह वह ८ है जिसका तीनों घनमूल अपेक्षित हैं, इसलिये इसे कहेंगे कि यह प्रसिद्ध संख्या ८ है।



ये सब न घातमूल के बश साधारण आ संख्या के श्रृंखल हैं। क्योंकि पहिले के ऊपर यथा क्रम दूसरे, तीसरे, ..... न संख्यक श्रृंखलों को ऐसे रख दें जिसमें सब आ और परिधि के भीतर का

न एकट्ठा हो जाय तो  ऐसा हो जायगा जो कि साधा-

रण आ संख्या के तुल्य है।

न के स्थान में १, २, ३, ... के उत्थापन से कह सकते हो कि १ घातमूल के वश साधारण आ संख्या में १ अङ्क, २ घातमूल के वश २ अङ्क, ३ घातमूल के वश ३ अङ्क, ४ घातमूल के वश ४ अङ्क, ... और न घातमूल के वश न अङ्क हैं। इसलिये

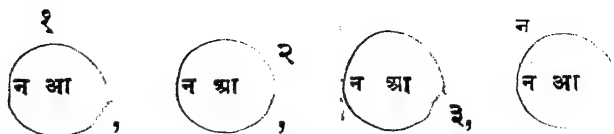
$$\begin{aligned} \text{साधारण आ संख्या} &= \overset{1}{\underset{1}{\text{आ}}} = \overset{1}{\underset{2}{\text{आ}}} \\ &= \overset{1}{\underset{3}{\text{आ}}} = \dots = \overset{n}{\underset{2}{\text{आ}}} \end{aligned}$$

इस पर से कह सकते हैं कि न को अनन्त मानने से साधारण आ संख्या में अनन्त अङ्क बना सकते हैं।

साधारण आ संख्या को १ मान कहें तो २ घात के मूल के वश इसमें दो अङ्क होंगे इस लिये  $\overset{1}{\underset{2}{\text{आ}}}$  इसमें वा  $\overset{2}{\underset{2}{\text{आ}}}$  इसमें

एक ही अङ्क अर्थात् साधारण आ संख्या का आधा अङ्क रहने से कहेंगे कि ये दोनों  $\frac{1}{2}$  मान है।

इसी प्रकार न घात मूल के वश साधारण आ संख्या में न अङ्क रहने से उसको यदि १ मान कहें तो



इन सब में केवल एक एक अङ्क रहने से सब को अलग अलग कहेंगे कि  $\frac{1}{n}$  मान है यदि  $n=\infty$  तो  $\frac{1}{n}=0$  और यदि  $n=m$  तो  $\frac{1}{n}=\frac{1}{m}$  होगा क्योंकि  $+$  में जब आ को १ मान माना है तो  $m$  के विपरीत  $-$  में १ मान से विपरीत  $-1$  मान होगा।

इसी प्रकार  $\frac{1}{n}$  आ २ इसको कहेंगे कि

$\frac{2}{n}$  मान है।  $n-1$   $\frac{1}{n-1}$  आ ३ इसे कहेंगे कि

$\frac{3}{n-1}$  मान है। इसी प्रकार सर्वत्र समझना चाहिए।

२५०। कल्पना करो कि  $0 = \frac{p}{f(y)} = \frac{p}{a_1 y^m + a_2 y^{m_1} + a_3 y^{m_2} + \dots + a_{n-1} y^{m_{n-1}} + a_n}$  यह एक समीकरण है जिसमें  $y$  के घाताङ्क सब धनात्मक भिन्न संख्या हैं जिनमें सबसे बड़ा  $\frac{p}{m}$  है।  $m, m_1, \dots, m_{n-1}$  का लघुतमापवर्त्य ज्ञात समझो।

जहाँ  $m, m_1, \dots, m_{n-1}$  के भाग देने से लघुतम क्रम से  $l, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$  समझो तो

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{y^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{y^{n-1}} + \dots$$

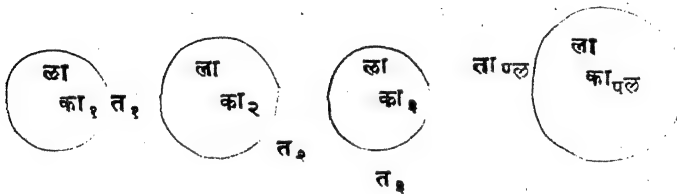
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{y^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{y^{n-1}} + \dots = 0 \text{ इसमें यदि } y = \frac{p}{q} \text{ लें तो}$$

$$f(y) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}} = 0$$

अब यह र के अकरणी गत अभिन्न फल के रूप में समीकरण हुआ। जिससे काशी के सिद्धान्त से र का मान प ल विध आवेगे। मान लो कि वे र के मान क्रम से  $k_1, k_2, k_3, \dots$  क ल है।

अब साधारण गणित की रीति से  $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n = k_{n+1}$  कहें और साधारण  $k_1, k_2, \dots$  इत्यादि संख्याओं के ल घात मूलों के मानों में  $k_1, k_2, \dots$  को  $t_1, t_2, t_3, \dots$  संख्या कहें तो  $(y = \frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$ , इसलिये २४६ प्रक्रम से





ये सब  $y$  के मान होंगे।  $का_१$ ,  $का_२$ ,  $का_{पल}$  साधारण संख्याओं को एक एक मान कहो तो २४७ प्रक्रम से  $\frac{१}{ला} = \frac{१}{मल}$

प्रत्येक मान होगा; इसलिये इनका योग  $= \frac{पल}{मल} = \frac{प}{म}$  इतने मान  $y$  के होंगे। इस पर से सिद्ध होता है कि समीकरण में अव्यक्त का सबसे बड़ा घन घात जो होता है वह चाहे अभिन्न वा भिन्न हो अव्यक्त के मानों की संख्या उसी के तुल्य होगी।

२५१। कल्पना करो कि  $n_१$ ,  $n_२$ ,  $n_t$  ये उत्तरोत्तर अधिक धनात्मक भिन्न वा अभिन्न संख्या हैं तो बीजगणित से  $-n_१ - n_२ - n_३ \dots - n_t$  ये ऋण संख्या में उत्तरोत्तर अल्प होंगी जिनमें सबसे बड़ा  $-n_१$  है।

मानो कि  $f(y) = अ_१ y^{-n_१} + अ_२ y^{-n_२} + अ_३ y^{-n_३} + \dots + अ_t y^{-n_t} = 0$  इसमें जानना है कि  $y$  के कितने मान हैं।

मान लो कि  $y$  के  $r$  विध मान हैं तो  $f(y)$  को  $y^{n_t}$  इस से गुण देने से जो  $y^{n_t} f(y) = 0$  यह समीकरण नया होगा उसमें अब  $r + n$  इतने मान  $y$  के होंगे परन्तु

$$y^{n_t} f(y) = अ_१ y^{n_t - n_१} + अ_२ y^{n_t - n_२} + \dots + अ_t = 0$$

जहाँ धनात्मक भिन्न वा अभिन्न  $y$  का सब से बड़ा घात  $n_t - n_१$  यह होगा इसलिये २४८ प्रक्रम से इसमें  $n_t - n_१$  इतने  $y$  के मान होंगे; इसलिये

$$r + n_t = n_t - n_1 \therefore r = -n_1$$

$$\text{इसलिये } f(y) = a_1 y^{-n_1} + a_2 y^{-n_2} + a_3 y^{-n_3} + \dots$$

+  $a_t y^{-n_t} = 0$  इसमें  $y$  के सब से बड़े घात की संख्या जो  $-n_1$  है उतने  $y$  के मान होंगे यह सिद्ध हुआ। इसलिये अब साधारणतः यह एक सिद्धान्त उत्पन्न होता है कि किसी समीकरण में अव्यक्त की सब से बड़ी जो घात संख्या होती है उतने ही विध उस समीकरण में अव्यक्त के मान आवेंगे चाहे वह घात संख्या अभिन्न वा भिन्न धनात्मक वा ऋणात्मक हो। जैसे

$$f(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots +$$

$$a_{n-1} y + a_n = 0$$

इस समीकरण में जहां  $n$  अभिन्न और धन है यदि  $y = \frac{1}{r}$

$$\text{तो नया समीकरण } \frac{a_0}{r^n} + \frac{a_1}{r^{n-1}} + \frac{a_2}{r^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{r} + a_n$$

$$= a_0 r^{-n} + a_1 r^{-(n-1)} + a_2 r^{-(n-2)} + \dots + a_{n-1} r^{-1}$$

$$+ a_n r^0 = 0$$

ऐसा हुआ, जहां बीजगणित की युक्ति से  $r$  का सब से बड़ा घात ० है। इसमें जितने  $r$  के मान आवेंगे उनकी संख्या ल कहें तो इस समीकरण को  $r^n$  से गुण देने से जो दूसरा समीकरण बनेगा उसमें  $r$  के मान  $n+1$  विध होंगे परन्तु समीकरण को  $r^n$  से गुण देने से जो दूसरा समीकरण  $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n = 0$

ऐसा बनेगा इसमें  $r$  के मान  $n$  विध आवेंगे इसलिये

$$n+1 = n \therefore n = 0$$

इससे सिद्ध होता है कि किसी हरात्मक समीकरण में यदि छेद, समीकरण को  $r^n$  से गुण कर न उड़ाए जायँ तो उसमें शून्य विध अव्यक्त का मान होगा। यह सब अत्यन्त चमत्कार है। इस पर गणितज्ञों को विशेष ध्यान देना उचित है। मेरा लिखना इस विषय पर कैसा है इसे भी ध्यान देकर विचारें।

२५१। यह दिखलाना है कि

$$\frac{a^2}{y-a} + \frac{ka^2}{y-k} + \frac{sa^2}{y-s} + \dots + \frac{a^2}{y-a} - T = 0$$

इसमें  $y$  का मान कोई असंभव संख्या नहीं है।

सम्भव हो तो मानो कि  $y = p + b\sqrt{-1}$  तो दूसरा मान भी  $y$  का एक  $p - b\sqrt{-1}$  होगा। इन दोनों मानों का समीकरण में उत्थापन देने से जो समीकरण के दो मूल होंगे उनमें प्रथम में दूसरे को घटा देने से

$$b \left\{ \frac{a^2}{(p-a)^2 + b^2} + \frac{ka^2}{(p-k)^2 + b^2} + \frac{sa^2}{(p-s)^2 + b^2} + \dots + \frac{a^2}{(p-a)^2 + b^2} \right\} = 0$$

अब जब तक  $b=0$  न मानेंगे तब तक यह समीकरण असंभव होगा। क्योंकि कोष्ठकान्तर्गत सब पद धन हैं। वे मिल कर शून्य नहीं हो सकते। इसलिये समीकरण की सत्यता में शून्य के समान  $b$  का मान होने से सिद्ध हुआ कि इसमें अव्यक्त का कोई मान असंभव संख्या नहीं है।

२५१।  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  ये न अव्यक्त हैं। इनके वश से नीचे जो न समीकरण लिखे हैं उनसे इनका मूल जानना है

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = 0$$

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots + a_n y_n = 0$$

$$a_2^2 y_1 + a_2^2 y_2 + a_2^2 y_3 + \dots + a_n^2 y_n = 0$$

$$a_3^3 y_1 + a_3^3 y_2 + a_3^3 y_3 + \dots + a_n^3 y_n = 0$$

.....

$$a_1^{n-2} y_1 + a_2^{n-2} y_2 + a_3^{n-2} y_3 + \dots + a_n^{n-2} y_n = 0$$

$$a_1^{n-1} y_1 + a_2^{n-1} y_2 + a_3^{n-1} y_3 + \dots + a_n^{n-1} y_n = 0$$

इन समीकरणों को क्रम से  $x_{n-1}$ ,  $x_{n-2}$ ,  $x_{n-3}$ , .....  $x_2$ ,  $x_1$ , 1 से गुणा कर जोड़ देने से और ऐसी कल्पना करने से कि  $x_{n-1}$ ,  $x_{n-2}$ , इत्यादि जो कि अभी अविदित हैं ऐसे हैं कि इनके वश से जोड़ने में  $y_2$ ,  $y_3$ , .....  $y_n$  इनके अलग अलग गुणक सब शून्य हो जाते हैं तो

$$y_1 (a_1^{n-1} + x_1 a_1^{n-2} + x_2 a_1^{n-3} + \dots + x_{n-2} a_1 + x_{n-1}) = 0$$

$x_{n-1}$ ,  $x_{n-2}$ , ..... इत्यादि में ऐसा धर्म मानने से सिद्ध होता है कि

$$f(l) = l^{n-1} + x_1 l^{n-2} + x_2 l^{n-3} + \dots + x_{n-2} l + x_{n-1} = 0$$

इस समीकरण के  $a_2$ ,  $a_3$ , .....  $a_n$  ये सब अव्यक्तमान हैं इसलिये  $f(l) = (l - a_2) (l - a_3) \dots (l - a_n)$  इसमें  $l$  के स्थान में  $a_1$  का उत्थापन देने से  $y_1$  का गुणक

$(a_1 - a_2) (a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)$  यह आवेगा; इसलिये

$$y_1 = \frac{k}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)}$$

इसी प्रकार साजात्य धर्म रहने से  $y_2, y_3$ , इत्यादि के मान आ जायेंगे।

२५२।  $y, r, k$  इत्यादि न अव्यक्त हैं। उनके मान नीचे लिखे हुए न समीकरणों से निकालने हैं।

$$\frac{y}{x_1 - x} + \frac{r}{x_1 - k} + \frac{k}{x_1 - x} + \dots = 1$$

$$\frac{y}{x_2 - x} + \frac{r}{x_2 - k} + \frac{k}{x_2 - x} + \dots = 1$$

.....

$$\frac{y}{x_n - x} + \frac{r}{x_n - k} + \frac{k}{x_n - x} + \dots = 1$$

समीकरणों के रूप से कह सकते हैं कि  $x_1, x_2, x_3, \dots$

अतः ये  $\frac{y}{x - x} + \frac{r}{x - k} + \frac{k}{x - x} + \dots = 1$  इस न घात समीकरण में  $x$  के मान हैं। मान लो कि  $x = x - \tau$  तो इसके उत्थापन से और पदान्तरानयन से

$$1 + \frac{y}{\tau} + \frac{r}{\tau + k - x} + \frac{k}{\tau + x - x} + \dots = 0$$

छेदगम करने से इसका रूप

$$\tau^n + \frac{y}{\tau} \tau^{n-1} + \frac{r}{\tau} \tau^{n-2} + \dots + \frac{y}{\tau} = 0 \text{ ऐसा होगा जहाँ } \frac{y}{\tau} = y (k - x) (x - x)$$

परन्तु जब  $ज = अ - ट$   $\therefore ट = अ - ज$ ; इसलिये ट के मान सब  $अ - ज_1, अ - ज_2, अ - ज_3, \dots, अ - ज_n$  ये होंगे इसलिये २५ वें प्रक्रम के ५ वें प्रसिद्धार्थ से

$$अन = (अ - ज_1) (अ - ज_2) (अ - ज_3) \dots = 0$$

$$(-1)^n य (क - अ) (ख - अ) \dots$$

$$\therefore य = \frac{(अ - ज_1) (अ - ज_2) (अ - ज_3) \dots}{(अ - क) (अ - ख) \dots}$$

इसी प्रकार  $ज = क - ट$ ,  $ज = ख - ट$ , इत्यादि मानने से, ल इत्यादि के मान आ जायंगे।

२५५। सिद्ध करना है कि  $ख, ख^2, ख^3, \dots, ख^n$  ये  $n$  संख्यायें हैं।

इनमें से  $m$ ,  $m$  संख्यायें ले लेकर उनके गुणनफल निकालें तो सब गुणनफलों के योग को सिद्ध करना है कि

$$\frac{(ख^n - 1) (ख^{11} - 1 - 1) \dots (ख^{n-m+1} - 1)}{(ख - 1) (ख^2 - 1) \dots (ख^m - 1)} \cdot \frac{m(m+1)}{ख^2}$$

मान लो कि

**फ**  $(य) = (य + ख) (य + ख^2) \dots (य + ख^n) = य^n + प_1 य^{n-1} + \dots + प_m य^{n-m} + \dots + प_n \dots (१)$  तो  $प_m$  का मान जानने के लिये २५ प्रक्रम के ५ वें प्रसिद्धार्थ से  $(१)$   $य$  के स्थान

में  $\frac{य}{ख}$  का उत्थापन देने से और  $ख^n$  से गुणन देने से

$$(y + x^2)(y + x^3) \dots (y + x^{n+1}) = y^n + p_1 x y^{n-1} + \dots + p_{n-1} x^{n-1} y + p_n x^n \dots (2)$$

(१) और (२) से

$$(y + x^{n+1})(y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_{n-1} y + p_n) \\ = (y + x)(y^n + p_1 x y^{n-1} + \dots + p_{n-1} x^{n-1} y + p_n x^n)$$

दोनों पक्षों के  $y^{n-m+1}$  के गुणकों को समान करने से

$$p_m + x^{n+1} p_{m-1} = p_m x^m + p_{m-1} x^m$$

$$\therefore p_m = \frac{x^m (x^{n-m+1} - 1)}{x^m - 1} p_{m-1} \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{और } p_1 = x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}$$

(३) में  $m$  के स्थान में १, २, ३, इत्यादि के उत्थापन से  $p_m$  का मान वही होगा जो कि ऊपर लिख आए हैं।

२५६।  $f(y) = 0$  इसमें मान लो कि अव्यक्त का एक मान  $x$  है तो  $f(y) = (y - x) f_1(y)$

$$\therefore \frac{f(y)}{y} = \left(1 - \frac{x}{y}\right) f_1(y)$$

$$\text{और ला } \frac{f(y)}{y} = - \left( \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \dots \right) + \text{ला } f_1(y)$$

इसलिये यदि ला  $\frac{f(y)}{y}$  इसका मान  $y$  के ऋण और धन

घात रूप पदों की श्रेणी में निकले तो  $\frac{1}{y}$  का जो गुणक होगा

वह दूसरे पद के  $\frac{1}{y}$  के गुणक - अ के समान अवश्य होगा यदि ला फा (य) के मान में य के सब धन ही घात हों तो ।

इस पर से फ (य) = ० इसका सब से छोटा मूल निकलेगा तैसे मान लो कि फ (य) = ० में एक से एक बड़े य के अ, क, ख, ग इत्यादि मान हैं तो

$$फ (य) = अ. (य - अ) (य - क) (य - ख)$$

$$\frac{फ (य)}{य} = अ. \left(1 - \frac{अ}{य}\right) (य - ख) (य - क) \dots$$

$$= क. \left(1 - \frac{अ}{य}\right) \left(1 - \frac{य}{क}\right) \left(1 - \frac{य}{ख}\right) \dots$$

$$जहाँ क. = अ. \times -क \times -ख \times - \dots \dots \dots$$

$$तो ला \frac{फ (य)}{य} = ला क + ला \left(1 - \frac{अ}{य}\right) + ला \left(1 - \frac{य}{क}\right)$$

$$+ ला \left(1 - \frac{य}{ख}\right) + \dots \text{अब यदि य, अ और क के बीच में हो तो}$$

$$ला \left(1 - \frac{अ}{य}\right), ला \left(1 - \frac{य}{क}\right), ला \left(1 - \frac{य}{ख}\right),$$

इनसे जो श्रेढी होगी उसमें ऐसे पद होंगे जिनमें बहुतों में य के ऋण घात और बहुतों में य के धन घात रहेंगे ।

$$जैसे यदि फ (य) = य^n + ख य - क = ०$$

$$तो \frac{फ (य)}{य} = ख - \frac{क}{य} + य^{n-1} = ख \left(1 - \frac{क}{ख य} + \frac{य^{n-1}}{ख}\right)$$



$$\text{इसलिये ला } \frac{फ(y)}{य} = \text{ला ख} + \text{ला } \left(1 - \frac{क}{खय} + \frac{य^{न-१}}{ख}\right) \\ = \text{ला ख} - \text{ल} - \frac{१}{२}\text{ल}^२ - \frac{१}{३}\text{ल}^३ \dots$$

$$\text{यदि ल} = \frac{क}{खय} + \frac{य^{न-१}}{ख} = \frac{क}{खय} \left(1 - \frac{य^{न}}{क}\right)$$

अब जिन जिन ल, ल<sup>न+१</sup>, ल<sup>२न+१</sup> इत्यादि पदों में  $\frac{१}{य}$  के गुणक

$$\text{हैं उनको अलगाने से लघुतम अव्यक्त मान} = \frac{क}{ख} - \frac{क^{न}}{ख^{न+१}} \\ + \frac{२नक^{२न-१}}{२.ख^{२न+१}}$$

$$- \frac{३न(३न-१)}{३.३} \frac{क^{३न-२}}{ख^{३न+१}} + \dots$$

२५७। इसी प्रकार फ(y) = ० इसमें अ<sub>१</sub>, अ<sub>२</sub>, ..., अ<sub>म</sub> ये अव्यक्त मान एक से एक बड़े और अवशिष्ट मानों से अल्प हैं तो

$$फ(y) = (य - अ_१) (य - अ_२) (य - अ_३) \dots (य - अ_म) \\ \times फ(y)$$

$$\text{इसलिये } \frac{फ(y)}{य^म} = \left(1 - \frac{अ_१}{य}\right) \left(1 - \frac{अ_२}{य}\right) \dots \left(1 - \frac{अ}{य}\right) \\ \times फ(y)$$

यहां भी दोनों पदों का लघुरिक्त लेने से ला  $\frac{फ(y)}{य^म}$  इसके  $\frac{१}{य}$  के गुणक को कहेंगे कि  $-(अ + अ_२ + अ_३ + \dots + अ_म)$  यही है।

यह ऊपर के दोनों सिद्धान्त मर्फी के समीकरण मीमांसा में लिखे हैं ( See Murphy's Theory of Equations, pages 77-83)

२५८। यदि  $\text{फा}(य)$ ,  $n-1$  घात का वा उससे अल्प घात का फल हो और  $\text{फ}(य)$   $n$  घात का तो कल्पना करो कि

$$\frac{\text{फा}(य)}{\text{फ}(य)} = \frac{\text{आ}}{य-अ} + \frac{\text{का}}{य-क} + \frac{\text{खा}}{य-ख} + \dots + \frac{\text{जा}}{य-ज}$$

जहाँ  $\text{फ}(य) = 0$  इसके मूल अ, क, ख, ..... ज, हैं जो कोई आपस में समान नहीं है।

दोनों पक्षों को  $\text{फ}(य)$  से गुण देने से

$$\begin{aligned} \text{फा}(य) = \text{आ} \frac{\text{फ}(य)}{य-अ} + \text{का} \frac{\text{फ}(य)}{य-क} + \text{खा} \frac{\text{फ}(य)}{य-ख} \\ + \dots + \text{जा} \frac{\text{फ}(य)}{य-ज} \end{aligned}$$

इसमें यदि  $य=अ$  तो दहिने पक्ष में प्रथम पद छोड़ और सब पद उड़ जायँगे और प्रथम पद पर वें प्रक्रम से

$$\text{फा}(अ) = \text{आ} \text{फ}'(अ) \text{ ऐसा होगा; इसलिये आ} = \frac{\text{फा}(अ)}{\text{फ}'(अ)}$$

इसी प्रकार  $\text{का} = \frac{\text{फा}(क)}{\text{फ}'(क)}$ , इत्यादि आ जायँगे।

यदि  $\text{फा}(य)$ ,  $n$  घात से बड़े घात का फल हो तो  $\text{फ}(य)$  के भाग से लब्धि  $\text{फि}(य)$  और शेष  $\text{फी}(य)$  जो  $n$  घात से

अल्प घात का होगा बनालो फिर ऊपर की युक्ति से  $\frac{फ(य)}{फ(य)}$  का मान खण्ड भिन्नों में बना लो।

$$\text{यदि } फ(य) = प_0 (य-अ)^त (य-क)^थ (य-ख)^द ... (य-ज)$$

$$\text{तो } \frac{फ(य)}{फ(य)} = \frac{आ}{(य-अ)^त} + \frac{का}{(य-क)^थ} + \frac{खा}{(य-क)^द} + \dots + \frac{जा}{य-ज}$$

ऐसा रूप बनाकर ऊपर की युक्ति से आ, का, खा, ..... के प्रमाण जान सकते हैं। इस विषय में और विशेष जानना हो तो चलनकलन और चलराशिकलन देखो। ऊपर के प्रकारों की व्याप्ति के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) सिद्ध करो कि

$$\frac{n}{(य+१)(य+२)\dots(य+n+१)} = \frac{१}{य+१} - \frac{n}{१} \frac{१}{य+२} + \frac{n(n-१)}{१ \cdot २} \frac{१}{य+३} - \dots + \frac{(-१)^n}{य+n+१}$$

$$\text{मान लो कि बायां पक्ष } \frac{आ_१}{य+१} + \frac{आ_२}{य+२} + \frac{आ_३}{य+३} + \dots + \frac{आ_{n+१}}{य+n+१}$$

$$= आ_१(य+२)(य+३)\dots + आ_२(य+३)(य+४)\dots + आ_३(य+४)(य+५)\dots + \dots + आ_{n+१}(य+१)(य+२)(य+३)\dots$$

य के स्थान में क्रम से  $-1, -2, -3, \dots$  के उत्थापन से

$$n = A_1, n \therefore A_1 = 1$$

$$n = -A_2, n-1 \therefore A_2 = -n$$

$$n = A_3, 2(n-2) \therefore A_3 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

इस पर से ऊपर की सरूपता उत्पन्न हुई।

२। सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{y+1} - \frac{n}{(y+1)(y+2)} + \frac{n(n-1)}{(y+1)(y+2)(y+3)} \dots$$

$$+ \frac{(-1)^n n}{(y+1) \dots (y+n+1)} = \frac{1}{y+n+1} \quad |$$

मान लो कि बायां पक्ष  $\frac{A_1}{y+1} + \frac{A_2}{y+2} + \frac{A_3}{y+3}$

$$+ \dots + \frac{A_{n+1}}{y+n+1}$$

तो छोदगम करने से और य के स्थान में  $-1, -2$ , इत्यादि के उत्थापन से

$$A_1 = (1-1)^n = 0, A_2 = n(1-n)^{n-1} = 0$$

$$A_3 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (1-1)^{n-2} = 0$$

इस प्रकार से सब के मान शून्य होंगे केवल  $A_{n+1} = 1$  ऐसा होगा; इसलिये ऊपर की सरूपता सिद्ध हुई।

इस प्रकार अनेक चमत्कृत सरूपता उत्पन्न होती हैं।

२५९ । य और र ऐसी दो राशि हैं कि

य + र + क = एक पूरा वर्ग, य - र + क = एक पूरा वर्ग,

$$\frac{र (य + १)}{२} = \text{एक पूरा घन, } य^२ + र^२ + ख = \text{एक पूरा वर्ग,}$$

य<sup>२</sup> - र<sup>२</sup> + ग एक पूरा वर्ग,

और इन पांचों के मूलों का योग = निर्दिष्ट संख्या तो उन दोनों राशिओं के कैसे मान कल्पित किए जायें जिसमें ऊपर के पांच आलाप आप स आप घट केवल अन्त के आलाप के लिये समीकरण किया जाय ।

भास्कराचार्य से भी पहिले भारतवर्षीय किसी प्राचीन गणितज्ञ का निकाला यह प्रश्न है क्योंकि भास्कराचार्य ने अपने बाजगणित में स्पष्ट लिखा है कि “कस्याप्युदाहरणम्” अर्थात् किसी का प्रश्न यह है । यहां क, ख और ग ये व्यक्त संख्या हैं ।

यहां यदि य + र + क = यो<sup>२</sup> तो य + र = यो<sup>२</sup> - क

और यदि य - र + क = वि<sup>२</sup> तो य - र = वि<sup>२</sup> - क

$$\text{इस पर से } य = \frac{यो^२ + वि^२ - २क}{२}, र = \frac{यो^२ - वि^२}{२}$$

अब वर्गान्तर का आलाप मिलाने के लिये

$$य^२ = \frac{यो^४ + २ यो^२ वि^२ - ४ क यो^२ + वि^४ - ४ क वि^२ + ४ क^२}{४}$$

$$र^२ = \frac{यो^४ - २ यो^२ वि^२ + वि^४}{४}$$

$$\text{और } य^2 - र^2 + ग =$$

$$\frac{४ यो^२ वि^२ - ४ क यो^२ - ४ क वि^२ + ४ क^२ + ४ ग}{४}$$

४

$$= यो^२ वि^२ - क यो^२ - क वि^२ + क^२ + ग$$

$$= यो^२ वि^२ - २ यो वि क + क^२$$

$$- (क यो^२ - २ यो वि क + क वि^२) + ग$$

$$= (यो वि - क)^२ + ग - क (यो - वि)^२$$

इस लिये यदि  $ग = क (यो - वि)^२$  तो

$$य^२ - र^२ + ग = \text{एक पूरा वर्ग} = (यो वि - क)^२$$

परन्तु जब  $ग = क (यो - वि)^२$  तब

$$(यो - वि)^२ = \frac{ग}{क} \therefore यो - वि = \sqrt{\frac{ग}{क}} \text{ और } यो = वि + \sqrt{\frac{ग}{क}}$$

अर्थात् वर्गान्तर के क्षेप में राशियों के योग वियोग क्षेप से भाग देकर वर्गमूल जो हो उसे कल्पित वियोग मूल में जोड़ देने से योग मूल का प्रमाण होता है। फिर इनके उत्थापन से यो और वि के फल रूप में य और र आ जायँगे जिन से फिर आगे क्रिया करनी चाहिए।

इस प्रकार से राशिकल्पना करने के लिये अपने बीजगणित में भास्कर ने यह सूत्र बनाया है।

सरूपमव्यक्तमरूपकं वा वियोगमूलं प्रथमं प्रकल्प्य ।

योगान्तरक्षेपकभाजिताद्यवर्गान्तरक्षेपकतः पदं स्यात् ॥

तेनाधिकं तत्तु वियोगमूलं स्याद्योगमूलं तु तयोस्तु वर्गौ ।

स्वक्षेपकोनौ हि वियोगयोगौ स्यातां ततः संक्रमणेन राशी ॥

ऊपर जो इसकी उपपत्ति लिखी है वह कृष्णदैवज्ञ की बनाई है। (वीजगणित की टीका बीजाङ्कुरा देखो)

भास्कर के प्रकार में यदि  $\frac{ग}{क} = \frac{०}{०}$  ऐसा हो अर्थात् जिस प्रश्न में  $क = ० = ग$  ऐसा हो वहां पर लुप्तमान होने से यह पता न लगेगा कि  $\sqrt{\frac{ग}{क}}$  इसका ठीक ठीक क्या मान है; इसलिये ऐसे स्थानों में भास्कर के प्रकार का व्यभिचार होगा। इसके लिये मेरी ऐसी कल्पना है।

कल्पना करो कि  $प = \sqrt{\frac{ग}{क}}$  तो ऊपर लिखी हुई क्रिया से

$$यो = वि + प, य = \frac{यो^2 + वि^2 - २ क}{२} = \frac{२ वि^2 + २ विप + प^2 - २ क}{२}$$

$$र = \frac{यो^2 - वि^2}{२} = \frac{२ वि प + प^2}{२}$$

$$य^2 = \frac{४ वि^४ + ८ वि^३ प + ४ वि^२ प^2 - ८ क वि^२ + ४ वि^२ प^2}{४}$$

$$+ \frac{४ वि प^३ - ८ क प वि + प^४ - ४ क प^२ + ४ क^२}{४}$$

$$र^2 = \frac{४ वि^२ प^२ + ४ वि प^३ + प^४}{४}$$

$$\text{और } य^2 + र^2 + ख = \frac{४ वि^४ + ८ प^४ वि^३ + १२ प^२ वि^२ - ८ क वि^२}{४}$$

$$+ \frac{८ प^३ वि - ८ क प वि + २ प^४ - ४ क प^२ + ४ क^२ + ४ ख}{४}$$

$$\begin{aligned}
 &= वि^४ + २ प वि^३ + ३ प^२ वि^२ + २ प^३ वि + \frac{प^४}{२} \\
 &\quad - २ क वि^२ - २ क प वि - क प^२ + क^२ + ख \\
 &= (वि^२ + प वि)^२ + २ वि^२ (प^२ - क) + वि (२ प^३ \\
 &\quad - २ क प) + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख \\
 &= (वि^२ + प वि)^२ + २ वि^२ (प^२ - क) + २ प वि (प^२ - क) \\
 &\quad + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख \\
 &= (वि^२ + प वि)^२ + २ (प^२ - क) (वि^२ + प वि) \\
 &\quad + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख \\
 &= (वि^२ + प वि)^२ + २ (प^२ - क) (वि^२ + प वि) \\
 &\quad + (प^२ - क)^२ - (प^२ - क)^२ + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख \\
 &= \{ (वि^२ + प वि) + (प^२ - क) \}^२ - (प^२ - क)^२ \\
 &\quad + \frac{प^४}{२} + क^२ - ग + ख
 \end{aligned}$$

बड़े कोष्ठ के बाहर के सब पद मिल कर यदि शून्य हो जायें तो यह पूरा वर्ग हो जायगा इस लिये

$$\begin{aligned}
 ० &= \frac{प^४}{२} + क^२ - ग - (प^२ - क)^२ + ख = \frac{प^४}{२} + क^२ - ग \\
 &\quad - प^३ + २ क प^२ - क^२ + ख
 \end{aligned}$$



$$= २ क प^२ - \frac{प^४}{२} - ग + ख = २ ग - \frac{प^४}{२} - ग + ख = ग + ख - \frac{प^४}{२}$$

$$\therefore \frac{प^४}{२} = ग + ख \text{ और } प = \left\{ २(ग + ख) \right\}^{\frac{१}{४}}$$

इस पर से सिद्ध होता है कि वर्गान्तर और वर्गयोग द्वेषों के दूने योग के मूल का मूल जो हो वही  $\sqrt{\frac{ग}{क}}$  इसका मान होता है। अब चाहे ग, और क शून्य हों वा संख्यात्मक हों मेरे प्रकार का कहीं भी व्यभिचार न होगा।

इसपर मेरा बनाया यह सूत्र है।

वर्गान्तरक्षेपकसंमितिर्युता क्षेपेण कृत्योर्युतिजेन वै ततः ।  
द्विघातपदं तत्पदयुग्वियोगजं मूलं युतेर्मूलमतस्तयोर्मिती ॥  
अब पाँचवां आलाप मिलाने के लिये यदि

$$\begin{aligned} \sqrt{य - र + क} &= \text{वि तो} \\ \sqrt{य + र + क} &= \text{यो} = \text{वि + प} \\ \sqrt{य^२ - र^२ + ख} &= \text{यो वि - क} = \text{वि}^२ + प \text{ वि - क} \\ \sqrt{य^२ + र^२ + ख} &= \text{वि}^२ + प \text{ वि - क} + प^२ \\ \left\{ \frac{र (य + १)}{१} \right\}^{\frac{१}{३}} &= \text{वि} + \frac{१}{३} (ख + ग \frac{१}{३}) \end{aligned}$$

$$\text{क्योंकि } य + १ = \frac{२ \text{ वि}^२ + २ \text{ वि प} + प^२ - २ क + २}{२}$$

$$r = \frac{2 \text{ वि प} + \text{प}^2}{2}$$

$$\begin{aligned} & ४ \text{ प वि}^2 + ४ \text{ प}^2 \text{ वि}^2 + २ \text{ प}^2 \text{ वि} - ४ \text{ क प वि} + ४ \text{ प वि} \\ & २ \text{ प}^2 \text{ वि}^2 + २ \text{ प}^2 \text{ वि} + \text{प}^4 - २ \text{ प}^2 \text{ क} + २ \text{ प}^2 \end{aligned}$$

$$\text{प} \{ ४ \text{ वि}^2 + ६ \text{ प वि}^2 + (४ \text{ प}^2 - ४ \text{ क} + ४) \text{ वि} \} + \text{प}^4 - २ \text{ प}^2 \text{ क} + २ \text{ प}^2$$

$$\begin{aligned} & = \text{प} \{ ४ \text{ वि}^2 + ६ \text{ प वि}^2 + (४ \text{ प}^2 - ४ \text{ क} + ४) \text{ वि} \} \\ & + २ \text{ ग} + २ \text{ ख} - २ \text{ ग} + २ \text{ प}^2 \end{aligned}$$

इसलिये

$$\frac{r (य + १)}{२}$$

$$= \text{प} \frac{\{ ४ \text{ वि}^2 + ६ \text{ प वि}^2 + (४ \text{ प}^2 - ४ \text{ क} + ४) \text{ वि} \} + २ \text{ ख} + २ \text{ प}^2}{२}$$

अब यदि यह पूरा घन होगा तो

३ (४प)<sup>३</sup> इससे ६ प<sup>३</sup> यह अवश्य निःशेष होगा और लब्धि का घन = २ ख + २ प<sup>३</sup> ऐसा होगा। कल्पना करो कि लब्धि = ल तो ३ ल (४प)<sup>३</sup> = ६ प<sup>३</sup> ∴ ल<sup>३</sup> (४प)<sup>३</sup> = २ प<sup>३</sup> अर्थात् १६ प<sup>३</sup> ल<sup>३</sup> = २ प<sup>३</sup> ∴ ल<sup>३</sup> =  $\frac{\text{प}^३}{८}$ । परन्तु पहिले सिद्ध कर आए हैं

कि  $\frac{\text{प}^३}{२} = \text{ख} + \text{ग}$ , इसलिये

ल<sup>२</sup> =  $\frac{प^४}{२} = ख + ग = २ख + २प^२ \therefore \frac{ग-ख}{२} = प^२$ ; इसलिये यदि  $\frac{ग-ख}{२} = प^२ = \frac{ग}{क}$  तो पांचो आलाप भास्कर की युक्ति से मिल सकते हैं।

जब  $\frac{ग-ख}{२} = \frac{ग}{क}$  तो छेदगम से

$$क ग - क ख = २ ग, वा क (ग - ख) = २ ग$$

इस पर से यह सिद्ध होता है कि यदि वर्गान्तर क्षेप में वर्गयोग क्षेप को घटाने से जो शेष बचे उससे योगान्तर क्षेप को गुण दें, गुणनफल दूने वर्गान्तर क्षेप के तुल्य हो तो भास्कर की क्रिया से कहेंगे कि प्रश्न ठीक है, उत्तर निकल सकता है।

इसी प्रकार पांचवा आलाप ऐसा हो कि  $\frac{यर}{२} + २$  यह एक पूरा घन है तो यहाँ भी ऊपर ही की युक्ति से सब बातों का परामर्श कर सकते हो।

( प्रश्न के उत्तर के लिये भास्कर का बीजगणित देखो । )

२६०। य र = अ य + क र + ख इसमें चाहते हैं कि य और र के अभिन्न घनात्मक मान निकालें।

इसके लिये भास्कर चार्य ने ऐसी कल्पना की है कि मान लो कि जिस आयत का एक भुज य और दूसरा र है उसका क्षेत्रफल य र है जो कि अ य + क र + ख के समान है :

	आ	अ	च	पा
प		जा	छा	क
का				भा
		र		मा

र भुज के समानान्तर भुज आ पा में यदि एक खण्ड आ च=अ का र लें तो य, अ भुजों से नये आयत च का का क्षेत्रफल=अ य होगा। और य भुज के समानान्तर पा मा में पा भा=क काट लें तो च भा का क्षेत्रफल=क (र-अ)=क र -अ क, इन दोनों को समग्र क्षेत्रफल य र में घटा देने से छा मा आयत का फल=य र-अ य-क र+अ क=अ य+क र+ख-अ य-क र+अ क=अ क+ख, इसलिए छा जा=भा मा का कोई अभिन्न मान मान उसका भाग अ क+ख व्यक्त संख्या में देनेसे छा भा=जा मा का मान होगा। इन दोनों में क्रम से छा च=क और क भा=अ जोड़ देने से य और र के मान अभिन्न आ जायेंगे।

	छा	फ	छ	र	भा
चा					का
		ओ	य		पा
जा		का	र		गा

	आ	घा	चा
		गा	जा
का			
		मा	छा

यदि अ और क ऋण होंगे तो छा जा - छा चा = छा जा - क  
= य, छा भा - अ = र होंगे जहां भ = अ, का = क, यदि अ > र  
और क > य से तो

क - छा जा = य

अ - छा भा = र

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है कि

य र = अ य + क र + ख इस समीकरण में दोनों अव्यक्तों के  
गुणन फल में व्यक्ताङ्क ख जोड़ कर इसमें ऐसे एक इष्ट = इ का  
भाग दो जिसमें लब्धि = ल अभिन्न हों। फिर इ + अ = र वा  
इ - अ = र और ल + क = य वा ल - क = य।

जैसे यदि य र = ४ य + ३ र + २ तो यहां ४ = अ, ३ = क और  
ख = २ इस लिये अ क + ख = ४ × ३ + २ = १४। इसमें इष्ट = इ = २ का  
भाग देने से ल = ७। इन पर से य = ल + क = ७ + ३ = १० और  
र = इ + अ = २ + ४ = ६।

इष्ट के वश अनेक उत्तर होंगे।



=अ, व्यासार्द्ध से ऐसा का गा आ वृत्त बना जिससे दिए हुए वृत्त का समान दो भाग हो गया। का क प कोण का चापीय मान ष मान लो तो

का प आ चाप=२ अ ष=ध, का आ पूर्ण ज्या=२ अ ज्या ष=जी  
प चा=श, चा गा=श, का गा आ चाप=ध, का प आ चाप क्षेत्र का फल

$$= \frac{\text{अ}(\text{ध} - \text{जी}) + \text{श जी}}{२}$$

$$\text{का गा आ चाप क्षेत्र का फल} = \frac{\text{अ}(\text{ध} - \text{जी}) + \text{श जी}}{२}$$

$$\text{दोनों चाप क्षेत्रों का फल} = \text{आधा दिया हुआ वृत्त फल} \\ = \frac{\pi \text{ अ}^2}{२}$$

$$= \frac{\text{अ}(\text{ध} - \text{जी}) + \text{श जी} + \text{श जी} + \text{अ}(\text{ध} - \text{जी})}{२}$$

$$= \frac{२ \text{अ}(\text{ध} - \text{जी}) + २ \text{श जी} + \text{अ}(\text{ध} - \text{जी})}{२}$$

$$= \frac{\text{अ}(\text{ध} - \text{जी}) + \text{अ ध}}{२}$$

$$= \frac{\text{अ}(२ \text{अ ष} - २ \text{अ ज्या ष}) + २ \text{अ ज्या}^2 \text{ ष ध}}{२}$$

$$= \text{अ}(\text{अ ष} - \text{अ ज्या ष}) + \text{अ ज्या ष} \frac{२}{३} \text{ ष } २ \text{अ ज्या} \frac{२}{३} \text{ ष} (\pi - \text{ष})$$

$$= \text{अ}^2 \left\{ \text{ष} - \text{ज्या ष} + २ \text{ज्या}^2 \frac{२}{३} \text{ ष} (\pi - \text{ष}) \right\}$$

$$= \alpha^2 \{ \psi - \text{ज्या}\psi + (1 - \text{कोज्या}\psi) (\pi - \psi) \}$$

$$= \alpha^2 (\psi - \text{ज्या}\psi + \pi - \pi \text{ कोज्या}\psi - \psi + \psi \text{ कोज्या}\psi)$$

$$= \alpha^2 (\pi + \psi \text{ कोज्या}\psi - \pi \text{ कोज्या}\psi - \text{ज्या}\psi)$$

$$= \alpha^2 \{ \pi - \text{कोज्या}\psi (\pi - \psi) - \text{ज्या}\psi \}$$

$\alpha^2$  से दोनों पक्षों में भाग देने से और  $\frac{\pi}{2}$  को घटा देने से

$$\frac{\pi}{2} - \{ \text{कोज्या}\psi (\pi - \psi) + \text{ज्या}\psi \} = \text{फ}(\psi) = 0$$

१० वें प्रक्रम से ज्या  $(\pi - \psi) + \text{कोज्या}\psi - \text{कोज्या}\psi$

$$= \text{ज्या}\psi (\pi - \psi) = \text{फ}'(\psi) \text{ पहिले स्थूल मान मान लो कि } \psi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ तो}$$

$$\text{फ}(\psi_1) = \frac{\pi}{2} - 1 = 1.5707963267948966 - 1 = .5707963267948966$$

$$\text{फ}'(\psi_1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = 1.5707963267948966$$

१४४ प्रक्रमस्थ न्यूटन की रीति से

$$\frac{\text{फ}(\psi_1)}{\text{फ}'(\psi_1)} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi} = \text{च} = .3632818$$

$$\frac{\pi}{2} - \text{च} = \psi_2 = 1.2070839513814105, 11', 12''$$



$$\begin{aligned} \text{कोज्याष}_2 &= 25443108 \\ \pi - \text{ष}_2 &= 18380328 \end{aligned}$$

$$4002130$$

$$860021$$

$$86002$$

$$002$$

$$183$$

$$10$$

$$\text{कोज्याष}_2 (\pi - \text{ष}_2) = 4691854$$

$$\text{ज्याष}_2 = 838081$$

$$\text{यो} = 16218386$$

$$\frac{\pi}{2} = 14900963$$

$$\text{फ}(\text{ष}_2) = -0.041133$$

$$\text{ष}_2 - \text{च} = \text{ष}_1 = 1234386 = 90^\circ, 8', 28'', 38'''$$

$$\text{कोज्याष}_1 = 3200308$$

$$\pi - \text{ष}_1 = 18045448$$

$$800023$$

$$4900690$$

$$3211412$$

$$1428608$$

$$133803$$

$$4010$$

$$101$$

$$\text{कोज्याष}_1 (\pi - \text{ष}_1) = 4268008$$

$$\begin{aligned} \text{ज्याष}_2 &= 838081 \\ &= 183808080 \end{aligned}$$

$$10806261$$

$$4002120$$

$$003610$$

$$134303$$

$$0036$$

$$1480$$

$$18$$

$$\text{फ}(\text{ष}_2) = 10008281$$

$$\begin{aligned} \text{फ}(\text{ष}_2) &= -0.028280 = \text{च} \\ \text{फ}'(\text{ष}_2) &= \end{aligned}$$

$$\text{ज्याष}_2 = 838081$$

$$= 18045448$$

$$800023$$

$$1011412031$$

$$0623028$$

$$062302$$

$$06230$$

$$3212$$

$$402$$

$$118$$

$$10806261 = \text{फ}'(\text{ष}_1)$$

$$\begin{aligned} \text{ज्या } \varphi_1 &= \cdot 8888236 & \frac{f(\varphi_1)}{f'(\varphi_1)} &= -0.0000601 = \text{च} \\ \text{यो} &= 1.57079632679 & & \\ \frac{\pi}{2} &= 1.57079632679 \end{aligned}$$

$$f(\varphi_1) = -0.0000100018$$

$$\varphi_1 - \text{च} = \varphi_2 = 1.23456789 = 70^\circ, 48', 42'', 2''',$$

$$\text{कोज्या } \varphi_2 = \cdot 3226642$$

$$\text{ज्या } \varphi_2 = \cdot 8888834$$

$$\pi - \varphi_2 = 1.805555555$$

$$3.14159265359$$

$$5.09177147042$$

$$3.14159265359$$

$$1.57079632679$$

$$1.57079632679$$

$$1.57079632679$$

$$1.57079632679$$

$$1.57079632679$$

$$\text{कोज्या } \varphi_2 (\pi - \varphi_2) = \cdot 626333302$$

$$\text{ज्या } \varphi_2 = \cdot 8888834$$

$$\text{यो} = 1.57079632679$$

$$\frac{\pi}{2} = 1.57079632679$$

$$f(\varphi_2) = -0.000000001 = 0 \text{ स्वल्पान्तर से}$$

इस पर से

$$\text{अ, } = 2 \text{ अज्या } \varphi_2 = 2 \text{ अ ज्या } (34, 28', 21'', 1''')$$

$$= 2 \text{ अ} \times 1.57079632679$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{२अ \times ५७६३६४२५}{१००००००००} = \frac{२अ \times ११५८७२८५}{२००००००००} = \frac{२अ \times २३१७४५२}{४००००००} \\
 &= \frac{२३१७४५७अ}{२००००००}
 \end{aligned}$$

यही मान टेलर के सिद्धान्त से भी आवेगा। चलनकलन का २५ प्र० देखो।

इसके लिये यह मेरा सूत्र है :—

नगशरवेदनगक्षमारामकरैराहता त्रिभज्यास्वा।

प्रयुतद्वयेन भक्ता व्यासदलं स्यात् स्ववृत्तस्य ॥

२६२। ऊपर के प्रश्न में यदि  $\pi$  विन्दु के का गा आ चाप से दिए हुए का  $\pi$  आ वृत्त का न भाग हो तो ऊपर ही की क्रिया से

$$\frac{\pi(n-1)}{n} - \left\{ \text{कोज्या}\pi(\pi-\phi) + \text{ज्या}\phi \right\} = \phi \quad (\phi = 0)$$

ऐसा समीकरण होगा। इसमें पहिला  $\phi$  का स्थूल मान  $\frac{\pi}{n}$  इतना मान कर तब न्यूटन की रीति से असकृत् कर्म करना चाहिए।

यहां यदि त्रिकोणमिति से

$$\text{कोज्या}\phi = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots \quad \text{तो}$$

$$\text{कोज्या}\phi(\pi-\phi) = \pi - \frac{\pi\phi^2}{2!} + \frac{\pi\phi^4}{4!} - \frac{\pi\phi^6}{6!} + \dots$$

$$-x + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} + \frac{x^7}{6!} - \dots$$

$$\text{ज्या} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\text{कोज्या} (\pi - x) + \text{ज्या} = \pi - \frac{\pi x^2}{2!} + \frac{\pi x^4}{4!} - \frac{\pi x^6}{6!} + \dots$$

$$+ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5 \cdot 3!} + \frac{x^7}{7 \cdot 5!} - \frac{x^9}{9 \cdot 7!} + \dots$$

$$= \pi - \frac{\pi x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{\pi x^4}{4!} - \frac{x^5}{5 \cdot 3!} - \frac{\pi x^6}{6!} + \frac{x^7}{7 \cdot 5!}$$

$$+ \frac{\pi x^8}{8!} - \frac{x^9}{9 \cdot 7!} + \dots$$

इस पर से

$$\frac{(n-1)\pi}{n} \left\{ \text{कोज्या} (\pi - x) + \text{ज्या} \right\} = f(x) = 0$$

$$= -\frac{\pi}{n} + \frac{\pi x^2}{2!} - \frac{x^3}{3} - \frac{\pi x^4}{4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 3!} + \frac{\pi x^6}{6!} - \frac{x^7}{7 \cdot 5!} - \frac{\pi x^8}{8!} + \frac{x^9}{9 \cdot 7!} + \dots$$

$$= \pi \left( -\frac{1}{n} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots \right)$$

$$- \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5 \cdot 3!} + \frac{x^7}{7 \cdot 5!} - \frac{x^9}{9 \cdot 7!} + \dots \right)$$

ऐसा समीकरण को फेंका सकते हो ।

## अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। २२१ प्रक्रम की परिभाषा से सिद्ध करो कि स (य' - य'र) इसके सब अवलम्बनों के चलस्पद्धी होंगे यदि चल अर्थात् अव्यक्त संख्या  $\frac{य'}{र}$  मानी जाय ।

२। यदि  $आ_1, आ_2, आ_3, \dots, आ_n$  एक ही तद्रूप और ध्रुवशक्तिक फल सम्बन्धी  $\frac{फ(य)}{य-इ_1}, \frac{फ(य)}{य-इ_2}, \frac{फ(य)}{य-इ_3}, \dots, \frac{फ(य)}{य-इ_n}$  इनके अवलम्बनों हों जहां सोपान सो है और  $इ_1, इ_2, इ_3, \dots, इ_n$

$फ(य) = 0$  इसके मूल हैं तो सिद्ध करो कि

$\frac{त=n}{यौ आ_n(य-इ_n)}$  सो यह  $फ(य) = 0$  इसका चलस्पद्धी  $त=1$

होगा । सङ्केत के किये १६७ प्रक्रम का (२) उदाहरण देखो ।

३। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसमें  $१ + ५\sqrt{-१}, ५ - \sqrt{-१}$  ये अव्यक्त के मान हों और समीकरण अकरणी-गत संभाव्य गुणक का हो ।

$$उ० य^४ - १२य^३ + ७२य^२ - ११२य + ६७.६ = ०$$

४।  $य^४ + २य^३ - ५य^२ + ६य + २ = ०$  इसमें अव्यक्त के मान बताओ । इतना जानते हैं कि एक मान  $-२ + \sqrt{३}$  है ।

५।  $y^3 + 2py^2 + 3p^2y^2 + 3p^3y - p^4 = 0$  इसमें  $y$  के मान बताओ। उ० समीकरण का रूपान्तर  $(y^2 + py + p^2)^2 - p^4 - p^4 = 0$  ऐसा कर लो।

६।  $y^3 + p_1y^2 + p_2y + p_3 = 0$  इसमें यदि  $y$  मान  $a_1, a_2$  और  $a_3$  हों तो  $(a_2 + a_3 - a_1)^3 + (a_3 + a_1 - a_2)^3 + (a_1 + a_2 - a_3)^3$  इसका मान बताओ।

$$\text{उ० } 20p_1 - p_1^3$$

$$७। y^3 - \frac{x}{2}y^2 - \frac{9}{12}y + \frac{1}{102} = 0 \text{ इसको ऐसा बदलो}$$

जिसमें भिन्न न रहे। मान लो कि  $my = r$   $\therefore y = \frac{r}{m}$  इसके उत्थापन से

$$\frac{r^3}{m^3} - \frac{x}{2} \frac{r^2}{m^2} - \frac{9}{12} \frac{r}{m} + \frac{1}{102} = 0$$

$m^3$  से गुण देने से

$$r^3 - \frac{x}{2}mr^2 - \frac{9}{12}m^2r + \frac{m^3}{102} = 0$$

इससे स्पष्ट है कि यदि  $m=6$  तो अभिन्न समीकरण

$$r^3 - 3xr^2 - 4.5r + 2 = 0 \text{ ऐसा होगा।}$$

८। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान  $y^3 - 3y^2 + 6y^2 + 2y - 2 = 0$  इसके अव्यक्त मान के हरात्मक मान के तुल्य हों।

$$\text{उ० } 2r^3 - 3r^2 - 6r^2 + 2r - 2 = 0$$

६। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्तमान

$y^2 - 4y^3 + 7y^2 - 17y + 11 = 0$  इसके अव्यक्त मान से संख्या में ४ अरूप हों।

$$उ. र^2 + 11र^3 + 43र^2 + 44र - 9 = 0$$

१०।  $y^2 - 4y^3 - 12y^2 - 3y + 2 = 0$  इस पर से एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसमें तीसरा पद उड जाय।

$y = 1 - 3$ , और  $y = 1 + 3$  ऐसा मानने से तीसरा पद उड जायगा।

११। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$y^2 - y^2 + 6y - 6 = 0$  इसके अव्यक्तमान के वर्ग के समान हों।

$$उ. र^2 + 12र^2 + 42र - 36 = 0$$

१२। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$y^n + n, y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0$  इसके अव्यक्त मान के घन के तुल्य हों।

ऊपर के समीकरण को

$$(p_n + p_{n-1} y^1 + p_{n-2} y^2 + \dots) + y (p_{n-1} + p_{n-2} y^1 + \dots) + y^2 (p_{n-2} + p_{n-3} y^1 + p_{n-4} y^2 + \dots)$$

$= पा + बा य + ता य^2$ , जहां पा, बा और ता  $y^1$  के फल हैं।

अब समीकरण में अव्यक्त के मान यदि  $अ_1, अ_2, \dots, अ_n$  हों तो  $पा + बा य + ता य^2 = (य - अ_1) (य - अ_2) \dots$

$$(य - अ_n), \dots (१)$$

य के स्थान में घा<sup>१</sup> य, घा<sup>२</sup> य के उत्थापन देने से जहां घा,  
बा<sup>१</sup> एक के घन मूल हैं

$$\text{पा} + \text{घा} \text{ बा} \text{ य} + \text{घा}^2 \text{ ता} \text{ य}^2 \equiv (\text{घा} \text{ य} - \text{अ}_1) (\text{घा} \text{ य} - \text{अ}_2) \dots$$

$$(\text{घा} \text{ य} - \text{अ}_n) \dots (2)$$

$$\text{पा} + \text{घा}^2 \text{ बा} \text{ य} + \text{घा} \text{ ता} \text{ य}^2 \equiv (\text{घा}^2 \text{ य} - \text{अ}_1) (\text{घा}^2 \text{ य} - \text{अ}_2) \dots$$

$$(\text{घा}^2 \text{ य} - \text{अ}_n) \dots (3)$$

(१), (२) और (३) को परस्पर गुण देने से और  
 $१ + \text{घा} + \text{घा}^2 = 0$  करने से

$$\text{पा}^3 + \text{बा}^3 \text{ य}^3 + \text{ता}^3 \text{ य}^3 - ३ \text{ पा} \text{ बा} \text{ ता} \text{ य}^3 \equiv (\text{य}^3 - \text{अ}_1^3)$$

$$(\text{य}^3 - \text{अ}_2^3) \dots (\text{य}^3 - \text{अ}_n^3) \text{ इसमें यदि } \text{य}^3 = \text{र तो}$$

$$\text{पा}^3 + \text{बा}^3 \text{ र} + \text{ता}^3 \text{ र}^2 - ३ \text{ पा} \text{ बा} \text{ ता} \text{ र}^3 \equiv (\text{र} - \text{अ}_1^3)$$

$$(\text{र} - \text{अ}_2^3) \dots (\text{र} - \text{अ}_n^3)$$

अब पा<sup>३</sup>, बा<sup>३</sup> और पा बा ता के मान में भी य<sup>३</sup> के स्थान  
में र के उत्थापन से अभीष्ट समीकरण बन जायगा।

१३। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्तमान

$$\text{य}^3 - \text{य}^3 + २\text{य}^2 + ३ \text{ य} + १ = 0 \text{ इसके अव्यक्त मान के घन}$$

$$\text{के समान हों। उ. } \text{र}^3 + १४ \text{ र}^2 + ५० \text{ र} + ६ \text{ र} + १ = 0$$

१४। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$$\text{अ य}^3 + \text{क य}^2 + \text{ख य} + \text{ग} = 0 \text{ इसके अव्यक्त मान के घन}$$

$$\text{के समान हों।}$$

$$\text{उ. } \text{अ}^3 \text{ र}^3 + ३ (\text{अ}^2 \text{ ग} + ६ \text{ क}^3 - ६ \text{ अ क ख}) \text{ र}^2$$

$$+ ३(\text{अ ग}^2 + ६ \text{ ख}^3 - ६ \text{ क ख ग}) \text{ र} + \text{ग}^3 = 0$$



१५। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान  $y^3 + ६y^2 + ६y + ४ = ०$  इसके दो दो अव्यक्तमानों के अन्तरों के वर्ग के समान हों।

$$उ. य^3 - १८y^2 + ८१y = ०$$

१६। यदि  $अय^3 + ३अ_१y^2 + ३अ_२y + अ_३ = ०$  इसके अव्यक्त मान  $इ_१, इ_२$  और  $इ_३$  हों तो एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$$(इ_१ - इ_२)(इ_१ - इ_३), (इ_२ - इ_३)(इ_२ - इ_१), (इ_३ - इ_१)(इ_३ - इ_२)$$

$$ये हों। उ०  $r^3 + \frac{६हा}{अ_०}r^2 - \frac{२७(गा^२ + ४हा^३)}{अ_०^३} = ०$$$

हा और गा के लिये २२३ प्रक्रम का १ उदाहरण देखो।

१७।  $y^3 + मपय^2 + म^२प_१y^2 + म^३प_२y + म^४ = ०$  इसमें अव्यक्त के मानों को बताओ। उ०  $म^२य^२$  इससे भाग दे देने से

$$\left(\frac{य^२}{म_१} + \frac{म^२}{य^२}\right) + प\left(\frac{य}{म} + \frac{म}{य}\right) + प_१ = ० \text{ ऐसा एक हरात्मक}$$

समीकरण बन जायगा।

१८। यदि  $२य^२ + य - ६ = फ(य)$  तो बताओ  $फ(य)$  कब महत्तम वा न्यूनतम होगा।

$$उ. जब य = -\frac{४६}{८} \text{ तब } फ(य) \text{ न्यूनतम।}$$

१९। यदि  $फ(य) = ३य^४ - १६य^३ + ६य^२ - ४८य + ७$  तो कब इस फल का मान महत्तम वा न्यूनतम होगा।

$$उ. य = ४ \text{ तो } फ(य) \text{ न्यूनतम।}$$

$$२०। y^5 + २० y^4 + ३० y^3 + १५ y^2 - ७y + ६ = ० \text{ इसमें}$$


धन मान की प्रधान सीमा क्या होगी। उ. २<sup>१</sup>

२१।  $y^2 + y^3 - ४ y^4 - ३y^2 + ३ y + १ = ०$  इसमें एक अव्यक्तमान - १ और ० के बीच का आसन्नमाना नयन से ले आओ।

उ.—२८४६३

२२।  $अ y^3 + ३ क y^2 + ३ ख y + ग = ०$  इसका रूप  $२^3 - १५ = ०$  ऐसा बनाना है। उ. मान लो कि  $२ = अ + अ, य + य^2$  फिर २३४ प्रक्रम की क्रिया करो।

२३। असंभवों का गुणन, भजन कैसे करते हो।

२४। सिद्ध करो कि यदि  $n = \infty$  तो  $\frac{n}{n}$   २ इसका

कोई अङ्क  $\neq \infty$  यह होगा। २४७ प्रक्रम देखो।

२५।  $y^{-2} - २ y^{-3} + ३ y^{-4} + ४ y^{-5} + ७ y^{-6} + ५ = ०$  बताओ इसमें  $y$  के कितने विध मान आवेंगे उ. ० विध।

२६। यदि अ, क, ख, ग, .... इत्यादि  $n$  संख्यायें हों तो सिद्ध करो कि  $\frac{(य-क)(य-ख)}{(अ-क)(अ-ख)}$  इस तरह के जो नफल

होंगे उनका योग एक के समान होगा।

यहां  $f(y) = (य-अ)(य-क)(य-ख) \dots$  मान लो और

$\frac{१}{फ(य)}$  इसका रूप खण्ड भिन्नो में लाकर फ ( य ) से गुण दो ।

२७। एक समीकरण का जिसमें सर और व्यत्यास दोनों हैं कैसे ऐसा रूपान्तर करें जिसमें सब सर ही हो और दूसरा कैसा रूपान्तर करें जिसमें सब व्यत्यास ही हो ।

( १ ) उ. धन प्रधान सीमा जान लो कि सी है तो फिर  $य = र + सी$  फिर ऐसा कल्पना कर समीकरण में उत्थापन दो तो र के फल स्वरूप में ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें र का कोई धन मान न आवेगा; इसलिये अब इसमें सर ही होंगे ।

( २ ) इसी प्रकार सब से छोटी धन प्रधान सीमा सी, हो तो  $य = र + सी$ , ऐसा मानने से र के रूप में जो समीकरण होगा उसमें र का कोई ऋण मान न होगा; इसलिये सब व्यत्यास ही होगा ।

२८। यदि न घात समीकरण का अन्त पद व्यक्ताङ्क  $प_n$  हो आर न विषम संख्या और अव्यक्त मान सब गुणोत्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि अव्यक्त का एक मान  $न\sqrt{प_n}$  यह होगा

२९। सिद्ध करो कि  $य^{२n} - पय^{२t} + ब = ०$  इसमें चार भिन्न-भिन्न संभाव्य अव्यक्त मान होंगे यदि  $\left(\frac{प_n}{न}\right)^n > \left(\frac{त_ब}{न-त}\right)^{n-t}$  और यदि  $\left(\frac{त_प}{न}\right)^n = \left(\frac{त_ब}{न-त}\right)^{n-t}$  तो उन चारों में दो दो तुल्य

होंगे और यदि  $\left(\frac{t p}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}} < \left(\frac{t b}{n-t}\right)^{\frac{n}{n-t}}$  तो कोई संभव मान न होगा। प और ब संभाव्य धन संख्या हैं। उ. समीकरण को फ (य) कहो तो फ' (य) =  $2 n y^{2n-1} - t p y^{2n-1}$  इसमें

यदि फ' (य) = 0 तो  $y=0$ , वा  $+ \left(\frac{t p}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-t)}} = a_2$  वा

$$- \left(\frac{t p}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-t)}} = a_1$$

अब ७३ वें प्रक्रम से फ (य) में  $-\infty, -a_1, 0, a_1, +\infty$  के उत्थापन से

$$फ(-\infty) +, फ(0) = +, फ(+\infty) = +$$

$$फ(a_1) = फ(a_2) = \left(\frac{t p}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}} - p \left(\frac{t p}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}} + b$$

$$= \left(\frac{t p}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}} - \frac{n p}{t p} \left(\frac{t p}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}} + b$$

$$= \left(\frac{t-n}{t}\right) \left(\frac{t p}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}} + b = b - \left(\frac{n-t}{t}\right) \left(\frac{t p}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}}$$

इसलिये यदि

$$b < \left(\frac{n-t}{t}\right) \left(\frac{t p}{n}\right)^{\frac{n}{n-t}}$$

$$\text{वा } \left(\frac{त ब}{न-त}\right)^{न-त} < \left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}} \text{ तो}$$

$$फ(अ_1) = फ(अ_2) = -तब$$

$$\begin{array}{ccccccc} फ(-\infty), & फ(अ_1), & फ(0), & फ(अ_2), & फ(\infty) \\ + & - & + & - & + \end{array}$$

इसलिये चार व्यत्यास होने से चार भिन्न भिन्न संभाव्य मान— $\infty$  और  $अ_1, अ_2$  और  $0, 0$  और  $अ_2$ , और  $अ_2$  और  $\infty$  के बीच में होंगे। और बातें प्रसिद्ध हैं।

३०।  $फ(y) = y^* + प_2 y^2 + प_3 y + प_4 = 0$  इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त मान  $अ, \frac{म}{अ}, क, \frac{म}{क}$  इस चाल के हों।

३१। वर्गमूल निकालने की युक्ति से दिखलाओ कि  $y^* + प_1 y^* + प_2 y^2 + प_3 y + प_4 = 0$  इसको एक वर्गसमीकरण के रूप में ला सकते हैं यदि  $प_1^2 - ४ प_1 प_2 + ८ प_2^2 = 0$  वा  $(प_1 - ४ प_2) प_2 + प_2^2 = 0$

३२। सिद्ध करो कि  $y^* + \frac{१}{३} अ y^2 + क y + ख = 0$  इसमें सब संभाव्य मान कभी नहीं होंगे यदि  $अ^३ + क^३$  यह धन संख्या हो तो। (स्टर्म का सिद्धान्त लगाओ)

३३।  $y^* + प_1 y^2 + प_2 y + प_3 = 0$  इसमें यदि अव्यक्त मान  $अ, क, ख$  हों तो  $अ^२ क + क^२ ख + ख^२ अ$  इस अर्थ तद्रूप फल का मान बताओ।

उ. यदि  $अ^2क + क^2अ + ख^2अ = सा$  तो

$$\frac{सा}{(अकख)^2} = \frac{सा}{प_3^2} = \frac{1}{ख^2क} + \frac{1}{क^2अ} + \frac{1}{अ^2ख} \text{ और १६२—}$$

१६३ वें प्रक्रम से

$$\frac{३प_३ - प_१प_२}{प_३^2} = \frac{१}{अ^२क} + \frac{१}{क^२अ} + \frac{१}{क^२ख}$$

$$\frac{१}{ख^२क} + \frac{१}{ख^२अ} + \frac{१}{अ^२ख}$$

दोनों के अन्तर से

$$\frac{(३प_३ - प_१प_२) - सा}{प_३^2} = \frac{१}{अ^२क} + \frac{१}{क^२ख} + \frac{१}{ख^२अ}$$

और  $सा = अ^२क + क^२ख + ख^२अ$

दोनों के गुणन से

$$\frac{(३प_३ - प_१प_२) सा - सा^२}{प_३^2} = ३ - \frac{अ^३ + क^३ + ख^३}{प_३}$$

$$-प_३ \left( \frac{१}{अ^३} + \frac{१}{क^३} + \frac{१}{ख^३} \right)$$

$$= \frac{६प_३^३ + प_३^३प_१ + प_३^३ - ६प_१प_२प_३}{प_३^2} \text{ छेद को उड़ा देने से}$$

और पक्षान्तरानयन से

$$सा^२ - सा (३प_३ - प_१प_२) = ६प_१प_२प_३ - (६प_३^३ + प_३^३प_१ + प_३^३) \text{ यह वर्गसमीकरण हो जायगा।}$$

३४।  $y - ६$   $y^२ + ११$   $y^२ - ६ = ०$  इसमें यदि अव्यक्तमान अ, क और ख हों तो अ<sup>२</sup> क + क<sup>२</sup> ख + ख<sup>२</sup> अ इस का मान बताओ।

उ० २३ वा २५।

३५। ऊपर के समीकरणों में सिद्ध करो कि यौ अ<sup>२</sup>क = ४८

३६। सिद्ध करो कि फ (य) यह यदि य का अकरणीगत घन फल हो तो फ (य) = ०, और फ' (य) = ० इन दोनों में से एक समीकरणों में अवश्य एक अव्यक्त मान संभाव्य संख्या होगा।

उ० मान लो कि फ (य) =  $y^n + p$ ,  $y + p^२y + p$  तो यदि न विषम होगा तो २३ वें प्रक्रम से कम से कम फ (य) = ० इस में एक संभाव्य मान होगा और यदि फ (य) में न विषम न हो तो फ' (य) में न-१ यह विषम होगा; इसलिये तब फ' (य) = ० में २३ वें प्रक्रम से एक संभाव्य मान होगा।

३७। यदि फ (य) =  $y^n - १$  और फ' (य) = ० इसमें अव्यक्त मान अ, क, ख, ... हों तो दिखलाओ कि

$$\frac{n y^{n-१}}{y^n - १} = \frac{१}{y - अ} + \frac{१}{y - क} + \frac{१}{y - ख} + \dots$$

३८। उन दो राशियों को बताओ जिनके घात में छोटी राशि को जोड़ कर आधा करने से उसका पूरा पूरा घन मूल मिल जाता है। दोनों राशियों के योग और अन्तर में दो दो जोड़ दें तो उनका पूरा पूरा वर्गमूल मिल जाता है। राशियों के वर्गान्तर में आठ जोड़ दें तो इस का भी पूरा वर्गमूल

मिलता है, राशियों के वर्गयोग का भी पूरा वर्गमूल मिलता है और इन पांचों मूलों का योग २५ होता है।

उ० ६ और ८

३६। उन दोनों राशियों को बताओ जिनके योग और वियोग में तीन मिला दें तो उनका पूरा पूरा वर्गमूल निकल आता है। दोनों के वर्ग योग में चार घटा दें तो उसका पूरा वर्गमूल मिल जाता है। दोनों के वर्गान्तर में बारह जोड़ दें तो उसका भी पूरा वर्गमूल मिलता है। दोनों के घात के आधे में छोटी राशि को मिला दें तो उसका पूरा घनमूल मिलता है और पांचों मूलों का योग २३ होता है।

उ० ६ और ७

४०। उन दोनों राशियों को बताओ जिनके योग और अन्तर का पूरा पूरा वर्गमूल निकले, वर्गान्तर का भी पूरा वर्गमूल मिले, वर्ग योग का आठ मिलाने से पूरा वर्गमूल मिले, दोनों के घात में छोटी राशि को घटा कर आधा करें तो इसका घनमूल मिले और पांचों मूलों का योग १६ हो।

उ० ४ और ५

४१। वे दोनों अभिन्न राशि कौन हैं जिनके योग में उनके घात और वर्गयोग को मिला कर वर्गमूल लें उस में उन्हीं दोनों राशियों को मिला दें तो २३ हो।

उ० ७ और ५

४२। दश हाथ व्यासार्ध के वृत्तक्षेत्र की परिधि पर एक खूँटे में एक रस्सी से एक घोड़ा बाँधा है और ठीक आधे खेत



को घास को चरता है । बताओ जिस रस्सी में घोड़ा बँधा है उसकी लम्बाई कितना हाथ है ।

उ० ११५८७-८५

४३ । ऊपर के प्रश्न में जिस खूँटे में घोड़ा बँधा है उस से छ राशि के अन्तर पर परिधि ही के ऊपर एक दूसरा खूँटा है जिसमें एक गाय रस्सी से बँधी है वह भी ठीक आधे खेत की घास चरती है । बताओ दोनों के चरने से कितना खेत बाकी बचा ।

उ. २५-४५५ वर्ग हस्त ।

यह बीज बीज विचारि जो उर धारि हैं धरि धीरता ।  
 वर वासना विधि वारि डारि नकारि अङ्कुर धीलता ॥  
 निज सुमन सों बहु सुमन पाय सो धीर यश धन धी लहै,  
 राखत नरेश सुचाहि तेहि भाखत सुधाकर धीर है ॥  
 उनइस सै अरु चौवन संवत मास ।  
 सित शुचि दृइज गुरु दिन भयेउ प्रकास ॥  
 तेहि संवत सित कातिक दशमी गुरु दिन ।  
 पूरन कियेउ सुमिरि सिय-पति-पद जिन छिन ॥

इति श्रीकृपालुदत्तात्मजसुधाकरद्विवेदिकृता  
 समीकरण-मीमांसा सम्पूर्णा ।

# विषयानुक्रमणिका

## प्रथम भाग

### अध्याय १

उपयोगी गणित	१
अव्यक्त राशि	"
फल	"
पूर्णफल, पूर्णसमीकरण	२
अकरणीगत अभिन्नफल	५
उत्पन्न फल	१०
२ के अपचय घात क्रम से फ (५+२) का मान	१५
असम्भव संख्या और मध्यगुणक	१८
असम्भव का मूल	१६
३ के परिवर्तन से फ (ग+३) के मान का परिवर्तन	२०
समीकरण का मूल	२२
एकवर्ष समीकरण के मूलों की संख्या अव्यक्त के सब से बड़े घात के तुल्य होती है	२७

### अध्याय २

समीकरणों के गुण	३१
समीकरण में जोड़े जोड़े असम्भव मूल	"
तथा अकरणीगत मूल	३३
खण्डों की संख्या	३३

तुल्य मूल	३३
अव्यक्त के सब से बड़े घात की संख्या से मूल अधिक हों तो	
सब गुणक शून्य के तुल्य होता है	३४
समीकरण के एक मूल को जान उससे एक घात छोटे	
समीकरण का बनाना	३५
गुणकों और मूलों में परस्पर सम्बन्ध	३६
मूलों के वर्गों का योग	३८

### अध्याय ३

समीकरणों की रचना	४३
समीकरण के किसी एक पद का उड़ाना या हटाना	५०

### अध्याय ४

घनर्ण मूल	६३
क्रमिक पदयूथ	"
सर पद	"
व्यत्यास पद	"
डेस्कार्टिस की चिन्ह रीति	६४

### अध्याय ५

तुल्यमूल	७८
$f(y)=0$ में जितने एक घात के खण्ड एक बार, दो बार	
.....त बार आए हों उनके मूल जानना	८५

### अध्याय ६

समीकरण के मूलों की सीमा	८१
-------------------------	----

सीमा	६२
धनात्मक मूलों की प्रधान सीमा	११
कनिष्ठ सीमा	१०२
टाइलर साहेब की कनिष्ठ सीमा के मान में व्यर्थता	१०४
न्यूटन की रीति	१०५
अनुमान	११४
$\phi'(y)=0$ इसके सम्भाव्य मूल का जानना $\phi(y)=0$	
इसके सम्भाव्य मूल का जानना	११५
प्रत्येक व्यत्यास में $\phi(y)=0$ इसका एक ही मूल होता है	११६

### अध्याय ७

समीकरणों का लघुकरण	१२८
समीकरण के दो मूलों में परस्पर सम्बन्ध जानकर अल्प घात का नया समीकरण बनाना	१२८

### अध्याय ८

हरात्मक समीकरण	१३६
हरात्मक समीकरण को समघात का समीकरण बनाना	१४१
हरात्मक समीकरण को छोटे घात का बनाना	१४२

### अध्याय ९

द्वियुक्पद समीकरण	१४८
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	१४६
यम—१=०, यन—१=० इन दोनों समीकरणों में अव्यक्त का एक ही मान उभयनिष्ठ होता है जहाँ म और न परस्पर दृढ़ हैं	१५०

विशिष्ट मूल	१५५
अध्याय १०	
परिच्छिन्न मूल	१७१
अध्याय ११	
समीकरण के मूलों का आनयन	१८६
घन समीकरण के मूलों का आनयन	१८७
कार्डन की रीति	१८८
घन समीकरण के मूलों पर विशेष विचार	१९०
भास्कराचार्य का घन समीकरण	२०७
चतुर्घात समीकरण	२१०
ओलर की रीति	२१
फेररी वा सिम्पसन की रीति	२२३
डेकार्टिस की रीति	२२६
एस. एस. ग्रीथीड की कल्पना	२३०
अध्याय १२	
समीकरणों के मूलों का पृथक्करण	२४०
फेरियर, (वा बुडन) का सिद्धान्त	२४३
स्टर्म का सिद्धान्त	२५३
स्टर्म के शेषों को सहज में निकालने के लिये ग्रन्थकर्ता की युक्ति	२७२
अध्याय १३	
आसन्नमानानयन	२८१
भारतवर्ष के प्राचीन गणितज्ञों की रीति	२८
कमलाकर भट्ट की रीति	२८३
न्यूटन की रीति	२८६

फोरिअर की रीति	२८७
ला ग्रांज की रीति	२८३
लाग्रांज की रीति पर ग्रन्थकर्ता के विचार	३८३
हानर की युक्ति	३०४

### अध्याय १४

मानों के तद्रूपफल	३१६
न्यूटन की रीति	३१६
ब्रीओशी का चलनसमीकरण	३३७

### अध्याय १५

कनिष्ठफल	३५५
लाप्लेस की युक्ति	३७६
कनिष्ठफलों का सङ्कलन	३८३
कनिष्ठफलों का गुणन	३६६
ओलर का सिद्धान्त	३६५
हरात्मक व उत्क्रम कनिष्ठफल	४०३
सम्बद्ध ध्रुव	४०५
तद्रूप कनिष्ठफल	४०६
विजातीय तद्रूप कनिष्ठफल और विजातीय कनिष्ठफल	४०८

## दूसरा भाग

### अध्याय १६

लुप्तीकरण	४३५
तद्रूपफलों से लुप्तीकरण	४३६
प्रत्युत्पन्न के गुण	४३६
ओलर की रीति	४४२

सिलवेस्टर की युक्ति	४४३
बेज़ौट की क्रिया	४४५
एम. एम. लावेटी और सारस की रीति	४६४

### अध्याय १७

चलस्पर्धी, अचलस्पर्धी	४८०
चतुर्धातु समीकरण और इसके चल और अचल स्पर्धी	५११
जकोबी का चलस्पर्धी	५२१
टाशिन हौसेन (Tochirnhausen) की विधि	४२५
मिस्टर सीरेंट की कल्पना	५२६
सिलवेस्टर की कल्पना	५३०
डिमार्गन की कल्पना	५३१
काशी का सिद्धान्त	५४६
ग्रन्थकर्ता का सिद्धान्त कि किसी हरात्मक समीकरण में यदि छेद, समीकरण को $x^n$ से गुण कर न उड़ाए जाय तो उसमें शून्य विध्वज अव्यक्त का मान होगा	५६०
मफी के समीकरण-मीमांसा में लिखे हुए सिद्धान्त	५६४-५६६
भास्कर से पूर्व भारतवर्षीय किसी प्राचीन गणितज्ञ का निकाला हुआ प्रश्न	५७०
भास्कर के प्रकार का व्यभिचार तथा ग्रन्थकर्ता की कल्पना	५७२
$y, r = अ.य + क.र + ख$ इसमें $y$ और $r$ के अभिन्न घनात्मक मानों का निकालना	५७६
भास्कर की कल्पना	
निर्दिष्ट वृत्त के परिधिस्थित किसी बिन्दु का केन्द्र मान एक ऐसा वृत्त बनाना जिससे निर्दिष्ट वृत्त का दो समान भाग हो जाय	५७६

## शब्द-सूची

अ

- अव्यक्तराशि, Unknown quantity  
अकरणीगत, Rational  
अभिन्न, Integral  
अकरणीगत अभिन्नफल, Rational integral function.  
अपचय घात, Descending power  
अंश, Numerator.  
असंभव संख्या, Impossible or imaginary number  
अन्तिमप, Last term  
असंभव मूल, Imaginary root  
अनन्त, Infinity  
अधूरा समीकरण, Incomplete equation  
असकृत्कर्म, Repeated process  
असमान, Unequal  
अटकल से, By trial  
अपवर्त्ति त-घन-समीकरण, Cubic equation by reduction  
अनुमान, Corollary  
अव्यवहित, Contiguous or adjacent  
अव्यवहितोत्तर, Contiguous, different  
अव्यवहित पूर्व और उत्तर य के मान, Former and later adjacent values of x.  
अपवर्त्तन, Reduction  
अङ्कपाश, Permutation



अनुगम, Deduction  
 अचल स्पर्धी Invariant  
 अक्ष, Axis  
 अपवर्त्य, Multiple

आ

आसन्नमान, Aproximate value  
 आनयन, Solution  
 आयताकृति, Rectangular form  
 आयताकार, Rectangular  
 आयत, Rectangle

इ

इष्टाङ्क, Arbitrary number

उ

उत्पन्नफल, Derived function  
 उपचय, Ascending  
 उभयनिष्ठ, Common  
 उन्मिति, value  
 उपपत्ति, Proof  
 उत्थापन, substitution  
 ऊर्ध्वाधर, vertical  
 उपान्तिम, Last but one  
 ऊर्ध्वाधर पंक्ति, vertical line, column  
 उत्क्रम, Reciprocal

ऋ

ऋण, Negative

ए

एकवर्ण समीकरण, Equation with one variable

एकापचित, Decreasing by one

एकान्तर, alternate

क

करणी, Surds

करणीगत मूल, Irrational root

क्रमिक पदयूथ, group of terms in order

कनिष्ठ सीमा, Inferior limit

कोष्ठक, Bracket

कोटिज्या वा कोज्य, cosine

कर्ण, Hypotenuse

कोटि, altitude

कनिष्ठफल, Determinants

कर्णगत, situated diagonally

केन्द्र, center

ख

खिल, Wrong

ग

गुणक, Multiplier, coefficient

गुण्य, Multiplicand

गुणन-फल, Product

गुण्यगुणक रूप अवयव वा खण्ड, Factors

गुणोत्तर श्रेढी, Geometrical progression

ग्राह्यमान, admissible value

घ

घन, Cube

घन-समीकरण, Cubic equation

घात, Power

च

चिन्ह, Sign

चिन्ह रीति, Rules of signs

चतुर्घात समीकरण, Biquadratic equation

चलनकलन, Differential Calculus

चलराशिकलन, Integral Calculus

चलन समीकरण, Differential equation

चक्रवाल, Cyclical

चलस्पर्धी, Covariant

चापीय, Spherical

चाप, Arc.

छ

छेदगम से, By multiplying both sides of an equation by the greatest denominator.

ज

ज्या, sine

## त

- तृतीयोत्पन्नफल, Third derived function  
 तुल्य मूल, Equal roots  
 तुल्यान्तरित, Equidistant  
 तद्वरूपफल, Symmetrical function  
 तष्ट करना, To divide numerator by a denominator  
 and take the remainder only  
 तत्कालिक संबन्ध, Differential co-efficient  
 तिर्यक् पंक्ति, Rows, Horizontal line  
 तद्रूप, Symmetrical  
 तुल्यघात, Homogenous  
 त्रिकोणमिति, Trigonometry

## द

- द्वितीयोत्पन्न फल, Second derived function  
 द्वियुक्पदसिद्धान्त, Binominal Theorem  
 द्वियुक्पद समीकरणे Binominal equation  
 दृढ़, Prime  
 दशमलव, Decimal  
 द्वितीयपदरहित चतुर्घात समीकरण, Biquadratic equation  
 deprived of its second term  
 दीर्घवृत्तलक्षण, Ellipse

## ध

- धन, Positive  
 धनर्ण, Positive and negative

ध्रुवशक्ति, Having the sum of the exponents of  
each term equal

ध्रुवशक्ति, Sum of the exponents

ध्रुवा, Constituents of the determinants

ध्रुवाङ्क, Constituent

ध्रुव, Constituents

ध्रुवक, Constituent

धरातल, Plane

## न

निर्दिष्ट, Given

न्यून, Less

निरवयव, Without remainder, perfect

निष्पत्ति, Ratio

निरक्ष, non-constituent

न्यूनतम, Minimum

## प

प्रक्रम, Article

पूर्ण-फल, Complete function

पूर्ण-समीकरण, Complete equation

प्रथमोत्पन्नफल, First derived function

पक्ष, side

पद, term

प्रधान सीमा, Superior limit

परिच्छिन्न मूल, Commensurable root  
 पाटीगणित, Arithmetic  
 पद उड़ाना, Removal of a term  
 प्रसिद्धार्थ, Postulate  
 पंक्ति, Line  
 प्रधान पद, First element  
 पूरक, Complementary  
 परम्परा, Continuous arrangement, regular series  
 प्रत्युत्पन्न, Derivative  
 परिमिति, Limit  
 प्रधान समीकरण, Final equation  
 प्रकीर्णक, Miscellaneous Theorem  
 परिधि, Circumference  
 पूर्णज्या, Chord

फ

फल, Function, result

ब

बीजगणित, Algebra

भ

भाज्य, Dividend

भाजक, Divisor

भिन्न, fraction

भुज, Side or base of a triangle

म

मूल, Root

महत्तमापवर्त्तन, G. C. M.

मूलचिन्हान्तर्गत, Under radical sign

of

मुख्य समीकरण, Original equation

मध्यस्थ, Medium

मिश्र-चल, Complex variable

महत्तम, Maximum

य

योगान्तर श्रेढी, Arithmetical progression

यूथ, Group

र

रूप, Unity

ल

लब्धि, Quotient

लघुत्तमापकर्त्य, L. C. M.

लघूकरण, Reduction

लघुरिक्त, Logarithm

लघुकनिष्ठफल, Partial or minor determinant

लुप्ताकरण, Elimination

लम्ब, Perpendicular

व

विषम, Odd

व्यत्यास, Change

बहुयुक्पद, Polynominal term

वर्गसमीकरण, Quadratic equation

वितत रूप, continued form

विततभिन्न, Continued fraction

व्यतिरेक, Converse  
 व्याप्ति, Inherence  
 व्यत्यय, Reverse  
 विरुद्ध, Opposite  
 वास्तवमान, Real value  
 वज्राभ्यास, Cross multiplication  
 वक्र, Curve  
 वृत्त, Circle

## श

शेष, Remainder  
 श्रेणी, Series  
 श्रेढी, Progression

## स

समीकरण मीमांसा Theory of Equations  
 सरूप समीकरण, Linear equation  
 संख्यात्मक गुणक, Numerical co-efficient  
 सिद्धान्त, Theorem  
 सम्भाव्य संख्या, Real number  
 सम्भव संख्या, Real quantity  
 समीकरण, Equation  
 स्वतन्त्र, Independent  
 सम घात Even power  
 सर, Continuation  
 संशयात्मक, Ambiguous  
 सीमा, Limit



समच्छेद, Equal denominators  
 समकोण, Right angle  
 स्वल्पान्तरसे, Roughly  
 समीकरण के मूलों का पृथक्करण, Separation of the roots  
 of an equation  
 सम, Even, equal  
 संख्यात्मक मान, Numerical value  
 समशोधन से, By equal subtraction  
 सोपान, The highest exponent  
 सङ्कलन, Addition  
 सजातीय, similar, Homogenous  
 सम्बद्ध, conjugate  
 समानान्तर, Parallel  
 सीमा, Boundary

ह

हर, denominator  
 हरात्मक समीकरण, Harmonical equation

क्ष

क्षेत्रफल, Area of a figure  
 क्षेत्र, Figure  
 क्षेत्र, Additive

त्र

त्रिघात समीकरण, Cubic equation  
 त्रिकोणमिति, Trigo-nometry